Matrici invertibili

Def. A matrice quadrata $n \times n$ è detta invertibile se esiste $A^{-1} \in M(n \times n, K)$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica.

Denotiamo $GL(n, K) \subset M(n \times n, K)$ il sottoinsieme delle matrici invertibili.

Prop. $GL(n, K)$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne, detto gruppo lineare generale.

Dim.

1) Siano A, B matrici invertibili; allora anche AB è invertibile e si ha $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Infatti $(AB)(B^{-1}A^{-1}) \underset{\text{prop. assoc.}}{=} A(B^{-1}B)A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$.

Analogamente $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$.

2) E_n è invertibile, è elemento neutro.

3) Se A è invertibile, pure A^{-1} è invertibile e precisamente $(A^{-1})^{-1} = A$.

Oss. 1 $GL(n, K)$ non è sottosp. vettoriale di $M(n \times n, K)$. Per esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

è somma di matrici invertibili, ma non è invertibile. $GL(n,K)$ è sottogruppo moltipl. di $M(n\times n, K)$.

Oss. 2. Se A è invertibile, ${}^tA$ è invertibile e si ha $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Teorema Sia $f: \underset{n}{V} \to \underset{n}{W}$ lineare, fissiamo basi B di V, B' di W. Si ha che f è un isomorfismo se e solo $M^{B}_{B'}(f)$ è invertibile.

Dim.

Sia f isomorfismo $\Rightarrow \exists f^{-1}$ isom. inverso t.c. $f \circ f^{-1} = id_W$ e $f^{-1} \circ f = id_V$.

Sia $A = M^{B}_{B'}(f)$, $A' = M^{B'}_{B}(f^{-1})$. Allora

$$AA' = M^{B}_{B'}(f)\, M^{B'}_{B}(f^{-1}) = M^{B'}_{B'}(f \circ f^{-1}) = M^{B'}_{B'}(id_W) = E_n,$$

$$A'A = M^{B'}_{B}(f^{-1})\, M^{B}_{B'}(f) = M^{B}_{B}(f^{-1} \circ f) = M^{B}_{B}(id_V) = E_n$$

$$\Rightarrow A' = A^{-1}.$$

Vicev. sia $A = M^{B}_{B'}(f)$ invertibile. Allora $L(A)$ è un isomorfismo, infatti $AA^{-1} = E_n$, $\Rightarrow L(AA^{-1}) = L(A) \circ L(A^{-1}) = L(E_n) = id_{K^n}$. Analogam. $A^{-1}A = E_n \Rightarrow L(A^{-1}) \circ L(A) = id_{K^n}$ e dunque $L(A^{-1})$ è l'applicazione inversa di $L(A)$.

Ora consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & W \arrow[d, "K_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^n \end{tikzcd}$$

$$f = K_{B'}^{-1} \circ L(A) \circ K_B$$

composizione di isomorfismi è isomorfismo.

In particolare abbiamo che A è invertibile $\iff$ $L(A)$ è isomorfismo $\iff$ $L(A)$ è suriettiva (perché endomorfismo) $\iff$ le n colonne di A generano il codom. K^n $\iff$ il rango di A è massimo n.

Analogamente, ragionando sulle righe: A è invertibile $\iff$ le n righe di A generano lo spazio delle righe $\iff$ formano una base di K^n.

Cambiamento di base.

V K-spazio vettoriale di dim n

Supponiamo date 2 basi di V:

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$

Come si passa da coordinate rispetto ad $\mathcal{A}$ a coordinate rispetto a $\mathcal{B}$?

Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r] & K^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & v \arrow[d] \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

tale che $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n =$
$= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$.

Siccome $Hom(K^n, K^n) \simeq M(n \times n, K)$, l'applicazione lineare $K^n \to K^n$ che manda le coordinate di v rispetto ad $\mathcal{A}$ $(x_1, \dots, x_n)$ in quelle rispetto a $\mathcal{B}$ $y_1, \dots, y_n$, è del tipo $L(A)$, dove $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$,

e $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def: A è detta matrice del cambiamento.

di base, o matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V) = A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \quad id_V(v_1) \quad id_V(v_2) \quad \cdots \end{array}$$

Per def. di matrice associata

La prima colonna contiene le coordinate di v_1 risp. a $w_1, \dots, w_n$, la seconda quelle di v_2, ecc. Ossia: $v_1 = a_{11}w_1 + \dots + a_{n1}w_n, \dots, v_n = a_{1n}w_1 + \dots + a_{nn}w_n$.

<u>Oss.</u> Siccome $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$ rappresenta id_V, che è ovviamente un isomorfismo, rispetto a una scelta di basi di dominio e codominio, il rango di $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$ è uguale a n, cioè la matrice è invertibile. La sua inversa è proprio $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id_V)$. Infatti:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] \arrow[rr, bend right, "id_{K^n}"'] & K^n \arrow[r, "L(A')"'] & K^n \end{tikzcd}$$

questo diagramma è commutativo

$A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$, $A' = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id_V)$, $L(A') \circ L(A) =$

$= L(A'A) = id_{K^n}$

Quindi $A'A = E_n$. Analogamente si ha anche $AA' = E_n$.

Dunque $A' = A^{-1}$.

Oss. Fissata una base $\mathcal{B}$, ogni matrice invertibile può essere interpretata come matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a una nuova base.

Matrici di un'applicazione lineare rispetto a basi diverse.

Sia data un'applicazione lineare $f: V_n \to W_m$

e siano date 2 basi di V: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$

e 2 basi di W: $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Che relazione ~~che~~ c'è tra $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f)$? Consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}'}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & W \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{B}'}"] \\
K^n \arrow[r, "M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(id_V)"'] & K^n \arrow[r, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)"'] & K^m \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_W)"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

Allora $\boxed{M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_W)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(id_V)}$.

[Due matrici che rappresentano f rispetto a basi diverse differiscono per il prodotto a destra e sinistra per 2 matrici invertibili.]

<u>Conseguenza di un teorema precedente:</u>

Data M, matrice $m \times n$, esistono matrici invertibili S, T tali che

$$SMT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{dove} \quad r = rg(M).$$

<u>Dim</u> - Considero $L(M)$: rispetto alle basi canoniche M è la sua matrice. Ma esistono basi di K^n e K^m, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, rispetto alle quali la matrice è $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Sia $T = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(id_{K^n})$, $S = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_{K^m})$: SMT è la matrice voluta.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"'] & K^n \arrow[r, "L(M)"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{C}}"] & K^m \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] & K^m \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] \\
K^n \arrow[r, "L(T)"'] & K^n \arrow[r, "L(M)"'] & K^m \arrow[r, "L(S)"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

Da ciò segue una nuova dimostrazione del fatto che il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono.
Infatti, data M $m \times n$, esistono matrici invertibili S, T tali che $SMT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = A_r$.

1) Chiaramente il rango per righe di $A_r = SMT$ è uguale a quello per colonne, ed è uguale a r.
2) A_r e M hanno lo stesso rango per colonne perché rappresentano $L(A)$ rispetto a basi diverse.
3) Il rango per righe di SMT è uguale al rango per colonne di ${}^t(SMT) = {}^tT\,{}^tM\,{}^tS$, che è uguale al rango per colonne di ${}^tM$, per il punto 2); ed è quindi uguale al rango per righe di M.

∎

Caso di un endomorfismo $f: V \to V$

Se usiamo la stessa base nel dominio e nel codominio, il diagramma diventa:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"'] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "K_{\mathcal{A}}"] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\
K^n \arrow[r, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id_V)"'] & K^n \arrow[r, "A"'] & K^n \arrow[r, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)"'] & K^n
\end{tikzcd}$$

Allora $M_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)\, M_{\mathcal{A}}(f)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id_V)$

sono matrici una inversa dell'altra

$M_{\mathcal{B}}(f) = S\, M_{\mathcal{A}}(f)\, S^{-1}$, con S matrice del cambiamento di base. Se abbiamo le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto ad $\mathcal{A}$, possiamo scrivere direttamente $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id_V) = S^{-1}$.

Def. 2 matrici quadrate sono simili se $\exists\, S$ invertibile t.c. $A = SBS^{-1}$.

È una relazione d'equivalenza tra matrici $n \times n$: similitudine.

$A = SBS^{-1} \Rightarrow B = S^{-1}AS$

$A = SBS^{-1},\ B = MCM^{-1} \Rightarrow A = S(MCM^{-1})S^{-1} = (SM)C(SM)^{-1}$.

Si ha che due matrici sono simili sse rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

Un problema importante e non banale è quello di trovare un rappresentante "semplice" per la classe di similitudine di una matrice data – "forma canonica": descrivere l'insieme quoziente.
Vedremo il problema della diagonalizzabilità e la forma canonica di Jordan.

Oss. matrici simili hanno lo stesso rango: infatti rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile.

Iniziamo provando una

<u>Proposizione</u>

Sia A una matrice $n \times n$ tale che esiste una matrice $n \times n$ B per cui $BA = E_n$, oppure esiste una matrice C t.c. $AC = E_n$. Allora A è invertibile.

<u>Dim</u>. Se $BA = E_n$, $L(BA) = id_{K^n}$.
$$L(BA) = L(B) \circ L(A)$$

Ma allora $L(A)$ è iniettiva: infatti se $L(A)(v) = 0$, si ha $L(B)(L(A)(v)) = L(B)(0) = 0$, e dunque $v \in Ker(L(B) \circ L(A)) = 0$.

Essendo $L(A)$ un endomorfismo iniettivo di K^n, che ha dim finita, $L(A)$ è un isomorfismo, e perciò A è invertibile.

Se invece $AC = E_n$, $L(AC) = L(A) \circ L(C) = id_{K^n}$.

Allora $L(A)$ è suriettiva: se $w \in K^n$, $w = L(A)(L(C)(w))$ e dunque $w \in Im L(A)$. Come prima allora $L(A)$ è isomorfismo e A è invertibile.

Cor. Se ~~A è invertibile~~ $BA = E_n$

$\Rightarrow$ B è l'inversa di A.

Dim. A è invertibile dunque $\exists A^{-1}$:

$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n = BA$: moltiplico a destra per A^{-1} e ottengo $\underbrace{E_n A^{-1}}_{= A^{-1}} = \underbrace{(BA)A^{-1}}_{= B}$

Cor. Se $A\cancel{C} = E_n \Rightarrow$ C è l'inversa di A.

Dim. A è invertibile dunque $\exists A^{-1}$.

$AC = E_n \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(AC)}_{= C} = A^{-1}E_n = A^{-1}$.

Sia A $n\times n$ invertibile. Cerchiamo X $n\times n$ tale che $AX=E_n$: equazione matriciale nella matrice incognita $X=(x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

$AX=E_n \iff AX^1=e_1, AX^2=e_2, \dots, AX^n=e_n$, dove $X^1, X^2, \dots, X^n$ sono le colonne di X.

Trovare X equivale a risolvere n sistemi lineari con matrice dei coefficienti A, e colonne dei termini noti rispettivamente $e_1, e_2, \dots, e_n$.

A è invertibile $\Rightarrow$ ognuno di tali sistemi ha 1! soluzione. Per risolverli, usiamo l'algoritmo di Gauss, riducendo a gradini le matrici complete dei vari sistemi $(A \mid e_i)$. Lo facciamo per tutti gli n sistemi contemporaneamente, perché le trasformazioni elementari sono le stesse:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = (A \mid E_n) \longrightarrow (\underbrace{B}_{\text{a gradini con } n \text{ pivot}} \mid C):$$

Abbiamo così n sistemi lineari equivalenti ai primi. Ora operiamo di nuovo trasformazioni elementari nelle righe a partire dal basso, per mandare a zero tutti gli elementi sopra la diagonale principale di B:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & O & & b_{n-1,n} & & & \\ & & & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \rightarrow$$

$b_{nn} \neq 0$: usando l'ultima riga mandiamo a zero l'ultima colonna di B sopra b_{nn}

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b'_{12} & \cdots & 0 & c'_{11} & \cdots & c'_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \vdots & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & c'_{n-1,1} & \cdots & c'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right)$$

ora mandiamo a zero la penultima colonna di B sopra $b_{n-1,n-1}$.

ultima riga di $(B \vdots C)$ e diagonale di B invariati.

$$\rightarrow \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & & O & \\ & b_{22} & & D \\ O & & \ddots & \\ & & b_{nn} & \end{array}\right).$$

Ora con trasformaz. elementari del $\underline{\mathrm{I}}$ tipo trasformiamo la prima matrice in E_n, arriviamo a $(E_n \vdots A^{-1})$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio di cambio di base

$f: V \to W$ con $V = \mathbb{R}[t]_2$, $W = \mathbb{R}[t]_3$,

$f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$. Se $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$, $\mathcal{B}' = (1, t, t^2, t^3)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora consideriamo $\mathcal{A} = (1, t-1, (t-1)^2)$ in V e

$\mathcal{A}' = (1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3)$ in W. Sono basi?

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ha rg 3 $\Rightarrow \mathcal{A}$ è base.

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(id_W) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ha rg 4 $\Rightarrow \mathcal{A}'$ è base.

$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(f) = ?$ applico la regola

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(f) = \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(id_W)}_{\text{è l'inversa di } M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(id_W)} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \underbrace{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)}_{\text{già trovata}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

già triangolare

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

questa è l'inversa.

$f(1) = 0$, $f(t-1) = t^2$, $f(t^2-2t+1) = 2t^3$

$2t^3 = 2(t^3-6t^2+12t-8) + 12(t^2-4t+4) +$
$+ 24(t-2) + 16$: ha coord. $(2, 12, 24, 16)$ in ordine inverso
risp. ad $\mathcal{a}'$.

$t^2(2t+2-2) = 2t^3$ ~~+2~~

$t^2 = (t^2-4t+4) + 4(t-2) + 4$

$$M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{a}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 24 \\ 0 & 4 & 32 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$