Lezione 26 novembre

mercoledì 27 novembre 2019 15:00

Esercizio 7 del IX foglio:

Si consideri l'AL $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+z \\ 2x+z \end{pmatrix}$$

e sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana:

$$2y - z = 0$$

Si determini il sottospazio immagine $f(W)$.

Per esprimere il generico vettore di W, troviamo delle equazioni parametriche per W, ad esempio:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 2s \end{cases}$$

quindi il generico vettore di W è: $\begin{pmatrix} t \\ s \\ 2s \end{pmatrix}$

Calcoliamo l'immagine $f\left(\begin{pmatrix} t \\ s \\ 2s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t+s \\ t+s \\ 2t+2s \end{pmatrix}$

Quindi:

$$f(W) = \left\{ \begin{pmatrix} t+s \\ t+s \\ 2t+2s \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Quindi l'immagine del piano vettoriale W è la retta vettoriale $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Sia ora $r' \subseteq \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$r': \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Determinare il sottospazio $f^{-1}(r')$.

Di nuovo, per esprimere il generico vettore di r', trovo delle equazioni parametriche:

$$r': \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$, generico vettore di r': $\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

Per trovare $f^{-1}(r')$, devo determinare tutti i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$, cioè tutte le terne che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + y = -t \\ x - y + z = t \\ 2x + z = t \end{cases}$$

La matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -t \\ 1 & -1 & 1 & t \\ 2 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -t \\ 0 & -2 & 1 & 2t \\ 0 & -2 & 1 & 3t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -t \\ 0 & -2 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right) = (\tilde{A} \mid \tilde{b})$$

osservo che $\text{rg}\, A = \text{rg}\, (A|b) \iff t = 0$

cioè il sistema è compatibile $\iff t = 0$

$\implies$ l'unico vettore di r' che appartiene a $\text{Im}\, f$ è il vettore $\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ con $t = 0$, cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quindi: $f^{-1}(r') = f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = \ker f$

$\ker f$ è determinato dalle eq. del sistema $\tilde{A} x = \tilde{b}$ con $t = 0$:

$$ⓧ \begin{cases} x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

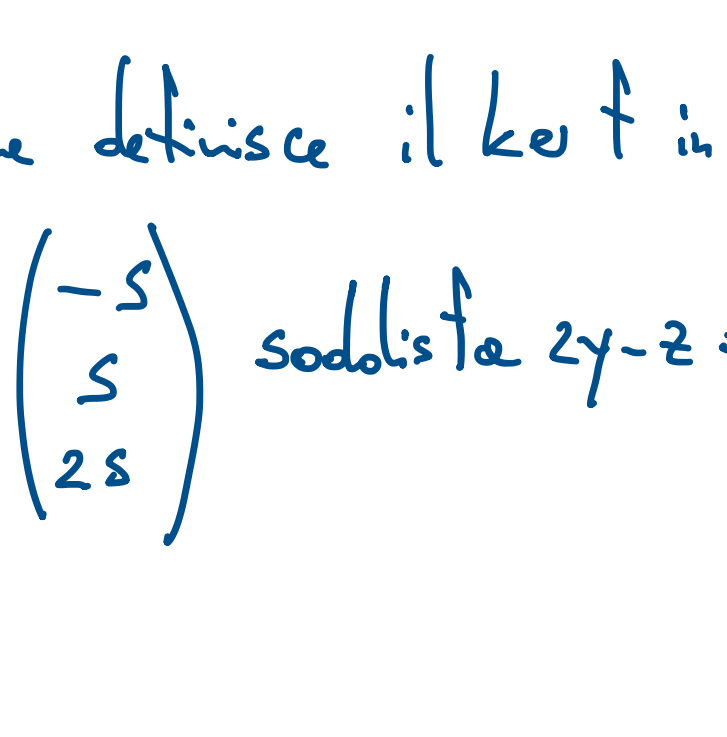
pongo $y = s$ parametro ; $z = 2s$, $x = -s$

$$\implies f^{-1}(r') = f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} -s \\ s \\ 2s \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

OSSERVAZIONI & COMMENTI:

Il sottospazio W del primo punto: $2y - z = 0$ contiene asse x di eq. $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, infatti l'eq. di W appartiene al fascio generato dai piani $y = 0$ e $z = 0$.

Inoltre: interseca il piano yz, di equazione $x = 0$, nella retta: $\begin{cases} x = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$



Osserviamo, anche, che $W \supseteq \ker f$, infatti $2y - z = 0$ è proporzionale a $-2y + z = 0$, che definisce il $\ker f$ in ⓧ.

Alternativamente: il vettore $\begin{pmatrix} -s \\ s \\ 2s \end{pmatrix}$ soddisfa $2y - z = 0$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

$\implies$ Se RESTRINGO f a W: $f|_W$

$$f|_W : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$\dim W = 2$

$\dim \ker f|_W = \dim \ker f = 1 \implies$ per il Teorema di Dimensione, $\text{Im}\, f|_W = 2 - 1 = 1$.

Per questo motivo la dimensione di $f(W)$ vale di 1.

Se avessimo considerato un piano vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $U \not\supseteq \ker f$, l'immagine di U sarebbe stata ancora un piano vettoriale.

Ad esempio, possiamo considerare $U: z = 0$.

$\ker f = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$

quindi $\ker f \not\subseteq U$.

Vogliamo determinare $f(U)$: trovo eq. parametriche per U:

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$f\left(\left\{\begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ 2s \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{lin. indipendenti}}\right)$$

$\implies \dim f(U) = 2$ ☺

- Per quanto riguarda il secondo punto, analizzo la posizione di r' e $\text{Im}\, f$:

ricordiamo che

$$\text{Im}\, f = \text{Span}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

osservo che $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$$\implies \text{Im}\, f = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$r' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; siccome

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$\implies \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im}\, f \implies r' \not\subseteq \text{Im}\, f$ e

$r' \cap \text{Im}\, f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Quindi l'unico vettore di r' che ha una controimmagine non vuota è il vettore nullo. Tutti gli altri vettori di r' NON provengono da alcun vettore di $\mathbb{R}^3$ tramite f.

~~~ . ~~~ . ~~~

MATRICI ASSOCIATE AD UNA AL:

Esempio: cons. $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scelgo la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$; si ha

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}_{p(e_1)} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{p(e_2)} \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im}\, p = \text{rg}\, p = \text{rg}\, M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p) = 1$

$\implies$ l'immagine di p è una retta vettoriale.

$\text{Im}\, p = \text{Span}\left(p(e_1), p(e_2)\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ = asse x

Per il Teorema di Dimensione:

$\dim \ker p = 2 - \text{rg}\, p = 2 - 1 = 1.$

Eq. di $\ker p$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x = 0$ asse y.

Scegliamo ora una base diversa di $\mathbb{R}^2$:

$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; vogliamo trovare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)$.

Troviamo prima le immagini tramite p dei vettori della nuova base:

$p\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nelle colonne di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)$ dobbiamo inserire le COORDINATE di questi 2 vettori NELLA BASE $\mathcal{B}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$

$\implies c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} a_1 - a_2 = -1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$

$\implies a_1 = -1/2$, $a_2 = 1/2$

$$\implies M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
~~~