Si poteva anche scrivere:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L(A)) = M^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2})\, M^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{C}_2}(L(A))\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}_3}(id_{\mathbb{R}^3})$$

$$2\times 2 \qquad 2\times 3 \qquad 3\times 3$$

$$M^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}_3}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gruppi di permutazioni

Considero l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\} = I_n$.

Una biezione $\sigma: I_n \longrightarrow I_n$ è detta permutazione di $\{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow \sigma(1) \\ 2 &\longrightarrow \sigma(2) \\ &\vdots \\ n &\longrightarrow \sigma(n) \end{aligned}$$

Es. $n=3$ $\{1,2,3\}$ Ho 6 permutazioni:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Denoto S_n l'insieme delle permutaz. di $\{1, \ldots, n\}$.

Ha $n!$ elementi: ho n scelte per $\sigma(1)$, $n-1$ per $\sigma(2)$, ecc.

Oss. S_n è un gruppo per la composizione di applicazioni. Non è abeliano se $n>2$. Ha ordine $n!$.

$\boxed{\text{GRUPPO SIMMETRICO } S_n}$

$n=1$ $S_1 = \{*\}$

$n=2$ 12, 21 ha 2 elem.: è isom. a $\mathbb{Z}_2$.

* Notazione: per indicare come opera σ si scrive:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ Applico prima questa, poi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ e ottengo $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se inverto l'ordine $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$: sono diverse.

⓪ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 7\ 4)(2\ 6\ 3)$

Esempi

① $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$1 \to 5 \to 7 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1$ ciclo di lunghezza 6 o permut. ciclica

$6 \to 6$ 6 è punto fisso (ciclo di lunghezza 1)

$(1\ 5\ 7\ 4\ 2\ 3\ 1)\ (6)$ non si scrive

σ è un ciclo di lunghezza 6

② $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$1 \to 2 \to 1$ $(1\ 2)$ ciclo di lung 2

$3 \to 5 \to 7 \to 6 \to 3$ $(3\ 5\ 7\ 6)$ ciclo di lung 4

$4 \to 4$ (4)

$(1\ 2)(3\ 5\ 7\ 6)\ \cancel{(4)}$ disgiunti

σ' è prodotto di 2 cicli disgiunti

σ' è prod. di 2 cicli di lung 2 e 4 : sono permutabili

Def. ciclo = permutazione del tipo (permutazione ciclica)

Notaz. $(n_1\ n_2\ \dots\ n_k)$ ciclo di lunghezza k o k-ciclo e gli altri elementi rimangono fissi.

Il prodotto di permutazioni si legge da sinistra a destra: applico prima quella di sinistra e poi vado verso destra. Diverso dalla composizione di applicazioni.

Esempio

$(1\ 3\ 5)(3\ 1\ 7\ 4)(6\ 7\ 2) =$

è un prodotto di cicli non disgiunti: conta l'ordine.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$1 \to 3 \to 1 \quad 2 \to 6 \quad 3 \to 5 \quad 4 \to 3 \quad 5 \to 1 \to 7 \to 2$

$= (2\ 6\ 7\ 4\ 3\ 5)$ è un 6-ciclo, 1 è fisso

Def. trasposizione è un 2-ciclo $(n_1\ n_2)$ ossia $n_1 \to n_2$, $n_2 \to n_1$ e tutto il resto resta fisso.

Oss. 1) $(1\ 3\ 5) = (3\ 5\ 1) = (5\ 1\ 3)$

2) Due cicli disgiunti commutano.

Prop.

1) Ogni permutaz. è prodotto di cicli disgiunti.

2) Ogni ciclo è prodotto di trasposizioni (non disgiunte in gen.)

3) Ogni permutaz. è prodotto di trasposizioni (non disgiunte in generale).

Dim.

1) Lo si fa in modo algoritmico.

2) Induzione su k, lunghezza del ciclo.

$k=2$: un 2-ciclo è una trasposizione

$(k-1) \Rightarrow k$ "

σ: $(n_1, \dots, n_k)$ = k-ciclo : può essere scritto così :

$\underbrace{(n_1, \dots, n_{k-1})}_{(k-1)\text{-ciclo}} \underbrace{(n_k, n_1)}_{2\text{-ciclo}} = (n_1, \dots, n_{k-1})(n_1, n_k)$

σ: $n_1 \to n_2 \to \dots \to n_k \to n_1$

τ: $(n_1 \to n_2 \to \dots \to n_{k-1})$ $(n_k \to n_1)$

$$\begin{array}{lclcl}
(n_1 \to n_2 & & n_2 \to n_2 & & n_1 \to n_2 \\
n_2 \to n_3 & & n_3 \to n_3 & & n_2 \to n_3 \\
\vdots & \text{e poi} & \vdots & \text{e quindi} & \vdots \\
n_{k-2} \to n_{k-1} & & n_{k-1} \to n_{k-1} & & n_{k-2} \to n_{k-1} \\
n_{k-1} \to n_1 & & n_1 \to n_k & & n_{k-1} \to n_k \\
n_k \to n_k & & n_k \to n_1 & & n_k \to n_1
\end{array}$$

e poi si applica l'ip. induttiva.

3) segue da 1) e 2).

Le espressioni come prod. di trasposizioni non sono uniche.

Def. inversione di $\sigma \in S_n$ è una coppia di indici $i<j$ ($\in \{1, \dots, n\}$) tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$.   Es. il ciclo $(1\ 2)$ ha un'inversione.

Def. segno di $\sigma \in S_n$ è definito come $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^a$, dove a è il numero di inversioni di σ.

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } a \text{ è dispari} \end{cases}$$

Proposizione: segno di una trasposizione.
~~Esempio~~ Sia $\sigma = (n_1 \ n_2)$ una trasposizione

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & \cdots & n_1-1 & n_1 & n_1+1 & \cdots & n_2-1 & n_2 & n_2+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n_1-1 & n_2 & n_1+1 & \cdots & n_2-1 & n_1 & n_2+1 & \cdots & n \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{I} \qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_{II} \qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_{III}$$

Un indice del 1° blocco non compare in alcuna inversione. Lo stesso per ogni indice del 3° blocco.

Ma $\forall$ n_i con $n_1 < n_i < n_2$ abbiamo 2 inversioni:

$n_1 < n_i$ ma $\sigma(n_1) = n_2 > \sigma(n_i) = n_i$

$n_i < n_2$ ma $\sigma(n_i) = n_i > \sigma(n_2) = n_1$.

E infine $n_1 < n_2$ ma $\sigma(n_1) = n_2 > n_1 = \sigma(n_2)$.

Complessivamente $\boxed{sgn(\sigma) = -1.}$

Def. permutazione pari se ha segno 1,
dispari — — -1.

Ogni trasposizione è dispari.

Teorema Date 2 permutazioni $\sigma, \tau \in S_n$,
$sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)\, sgn(\tau)$, ovvia l'applicazione

$$sgn : S_n \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot) \text{ gruppo con 2 elem. (le unità di } \mathbb{Z})$$
$$\sigma \longrightarrow sgn(\sigma)$$

è un omom. di gruppi.

Dim. no. La dim. segue da un lemma che dice $sgn(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Corollario

Se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ è un prodotto di k trasposizioni, allora $sgn(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} sgn(\tau_i) = (-1)^k$.

Se σ è un k-ciclo: $\sigma = (n_1, \dots, n_k)$, allora

$$sgn(\sigma) = (-1)^{k-1}.$$

Dim. Induz. su k.

Se $k=2$ $\quad sgn(2\text{-ciclo}) = -1$

"$k-1 \Rightarrow k$"

$$\sigma = (n_1 \dots n_k) = \underbrace{(n_1 \dots n_{k-1})}_{\substack{(-1)^{k-2} \\ \text{per ip. induttiva}}} \underbrace{(n_k\ n_1)}_{(-1) \text{ perché è trasp.}}$$

$\Rightarrow$ segue la tesi: $sgn(\sigma) = (-1)^{k-2}(-1) = (-1)^{k-1}$.

Es. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (1\ 5)(2\ 4)$ $\quad$ prod. di 2 trasp.

$sgn\, \sigma = (-1)^2 = 1$

Def. $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ è pari}\}$ è un sottogruppo di S_n, è il nucleo dell'omom. sgn.

A_n = sottogruppo alternante o gruppo alternante.

- chiuso rispetto al prod.

  $\sigma, \tau \in A_n \quad sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)\, sgn(\tau) = 1 \cdot 1 = 1$

- σ pari $\Rightarrow \sigma^{-1}$ pari. Infatti $\sigma\sigma^{-1} = id$

  $sgn(\sigma)\, sgn(\sigma^{-1}) = 1 \Rightarrow sgn(\sigma^{-1}) = 1$.

Oss. τ dispari $\Rightarrow \tau^{-1}$ dispari perché $\tau\tau^{-1} = id$.

$S_n = A_n \cup \underbrace{\{\text{permutaz. dispari}\}}_{\text{non chiuso risp. al prodotto}}$

Se τ è una permutaz. dispari:

$\tau A_n = \{\tau\sigma \mid \sigma \in A_n\}$ coincide con l'ins. di tutte le permutaz. dispari. Infatti se α è una perm. dispari, =

$$\alpha = \tau(\tau^{-1}\alpha) \quad \text{e} \quad \tau^{-1} \text{ è dispari}, \ \alpha \text{ dispari}$$

$$\Rightarrow \tau^{-1}\alpha \in A_n \quad \text{quindi } \alpha \in \tau A_n.$$

Perciò $\tau A_n = \{\text{permutaz. dispari}\}$ è in biezione con A_n: $A_n \to \tau A_n$, $\sigma \to \tau\sigma$.

Allora $S_n = \underset{\text{pari}}{A_n} \cup \underset{\text{dispari}}{\tau A_n}$ e i 2 sottoinsiemi sono in biezione.

Dunque A_n ha $\frac{n!}{2}$ elementi, ha ordine $\frac{n!}{2}$, così come l'insieme delle perm. dispari.

Esempio

$$S_3 = \{\overset{1}{id_{I_3}}, \underbrace{\overset{-1}{(1\ 2)}, \overset{-1}{(1\ 3)}, \overset{-1}{(2\ 3)}}_{2\text{-cicli}}, \overset{1}{(1\ 2\ 3)}, \overset{1}{(1\ 3\ 2)}\} \quad 6 \text{ elem.}$$

$$A_3 = \{id_{I_3}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

gruppo ab. con 3 elem. $\simeq \mathbb{Z}_3$

$$S_4 = \{\overset{+}{id_{I_3}}, \overbrace{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)}^{6 \quad \text{segno } -1},$$

$$\left.\begin{matrix}(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), \\ (1\ 3\ 4)\ (1\ 4\ 3)\ (2\ 3\ 4)\ (2\ 4\ 3)\end{matrix}\right\} \begin{matrix}8 \\ \text{segno } +\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2) \\ (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\end{matrix}\right\} \begin{matrix}6 \\ \text{segno } -\end{matrix}$$

prodotti di 2 2-cicli: $\left[(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\right\} \begin{matrix}3 \\ \text{segno } +\end{matrix}$

I 3 cicli hanno segno +.

Determinanti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Def. $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Oss. $\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = 2 \iff A$ è invertibile $\iff$ le righe (o le colonne) sono una base di K^2.

Interpretiamo det come un'applicazione che associa alla coppia di righe di A lo scalare $\det(A)$: funzione di 2 variabili. Inoltre $\det(A)$ è lineare in ogni riga ed è nullo se le 2 righe sono ~~uguali~~ linearmente dipendenti.

Def. funzione (o applicazione) multilineare

$D: V \times \cdots \times V = V^k \longrightarrow K$ è multilineare o k-lineare se è lineare in ogni argomento, cioè $\forall\, i = 1, \dots, k$

$$D(* \cdots *, \lambda v_i + \mu v_i', * \cdots *) =$$

$$= \lambda D(* \cdots *, v_i, * \cdots) + \mu D(* \cdots * \, v_i' \, * \cdots)$$

D è alternante se $D(v_1, \dots, v_n) = 0$ quando $\exists\, v_i = v_j$, $i \neq j$.

Def. una funzione determinante su V, con $\dim V = n$, è una funz. multilineare alternante $D: V \times \cdots \times V = V^n \longrightarrow K$.

Prop. Sia D una funzione determinante su V. Allora:

1) D è antisimmetrica, cioè

$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$

2) Se $\sigma \in S_n$, allora $D(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma \, D(v_1, \ldots, v_n)$.

3) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $D(v_1, \ldots, v_n) = 0$. In partic. se uno dei $v_1, \ldots, v_n$ è nullo, $D(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

<u>Dim.</u> 1)

Considero $D(v_1, \ldots v_i + v_j, \ldots v_i + v_j, \ldots, v_n) = 0$ (alternante)

multi-linearità

$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_j, \ldots v_i, \ldots, v_n) +$
$+ \underbrace{D(v_1 \ldots v_i \ldots v_i \ldots v_n)}_{0} + \underbrace{D(v_1 \ldots v_j \ldots v_j \ldots v_n)}_{0}$

2) Se σ è un prodotto di k trasposizioni, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k$ e per 1) di D ogni trasp. il segno cambia, perché ogni trasposiz. è dispari.

3) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono lin. dip., uno di loro è comb. lineare degli altri; supp. sia v_n:

$v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$. Allora

$D(v_1, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) =$
$= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \underbrace{D(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_i)}_{0 \text{ perché } D \text{ è alternante}} = 0$

Esempio banale: def. $D(v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad \forall v_1, \ldots, v_n \in V$.
Non è interessante.

<u>Oss.</u> Abbiamo dim. che D multilin. alternante è antisimmetrica. Vale anche il viceversa purché il campo K abbia caratteristica diversa da 2, cioè $\underset{1+1}{2} \neq 0$. Infatti:

$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$
$\Rightarrow 2\, D(v_1, \ldots v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$. Se $2 \neq 0$

è invertibile in K, dunque lo posso semplificare; altrimenti non si può concludere niente.

— · —

Supp. di avere fissato una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V. Consid. n vettori $w_1, \dots, w_n$; vogliamo esprimere $D(w_1, \dots, w_n)$ facendo intervenire la base $\mathcal{B}$.

Sia $w_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_j$ oppure $w_i = \sum_{j_i=1}^{n} x_{ij_i} v_{j_i}$.

$$D(w_1, \dots, w_n) = D\left(\sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2} v_{j_2}, \dots\right) =$$

multilinearità

$$= \sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1} D\left(v_{j_1}, \sum x_{2j_2} v_{j_2}, \dots, \sum x_{nj_n} v_{j_n}\right) = \text{ripeto ragionamento}$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{n} x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{nj_n} D(v_{j_1}, \dots, v_{j_n});$$

ma $D(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) \neq 0$ solo se non ci sono ripetizioni cioè $j_1, \dots, j_n$ formano una permutazione di $\{1, \dots, n\}$. Quindi posso riscrivere così:

$$D(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} D(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) =$$

(*)
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \underbrace{D(v_1, \dots, v_n)}_{\text{costante}}$$

formula di Leibniz per il determinante

Espressione con $n!$ addendi.

Corollario Sia $D \neq 0$.

Allora $(w_1, \dots, w_n)$ è una base di V $\Longleftrightarrow$

$D(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Dim. Se non sono una base, sono lin. dip., e dunque $D(v_1 \dots v_n) = 0$.

Se $D \neq 0$, $\exists$ vettori $w_1, \dots, w_n \in V$ t.c. $D(w_1, \dots, w_n) \neq 0$. Allora se $(v_1 \dots v_n)$ è una base, per la formula prec. si ha $D(v_1 \dots v_n) \neq 0$.

Teorema

Sia V sp. vett. di dim n, $(v_1 \dots v_n)$ una base di V.

Allora $\exists!$ funzione determinante $D: V^n \longrightarrow K$ tale che $D(v_1, \dots, v_n) = 1$.

Ogni altra funz. determinante è del tipo λD, $\lambda \in K$.

Dim.

L'espressione $(*)$ (Leibniz) implica l'unicità:

D deve operare così: se $w_i = \sum x_{ij} \cdot v_j$,

$$D(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}.$$

Così $D(v_1, \dots, v_n) = 1$ ($v_i = \sum_j \delta_{ij} v_j$).

Bisogna verif. che D è multilin. alternante.

- $D(w_1, \dots, \lambda w_i + \mu w_i', \dots, w_n) = \sum_\sigma sgn(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda x_{i\sigma(i)} + \mu x'_{i\sigma(i)}) \cdots =$

$= \lambda D(w_1 \dots w_n) + \mu D(w_1 \dots w_i' \dots w_n)$.

- Sia $w_i = w_j$, $i < j$: cioè $x_{ik} = x_{jk}$ $\forall k$.

Sia $\tau = (i\ j)$ traspos., $S_n = A_n \cup \tau A_n$:

$D(w_1 \dots w_i \dots w_j \dots w_n) = \sum_\sigma sgn(\sigma)\, x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} =$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} x_{1\sigma(\tau(1))} \cdots x_{n\sigma(\tau(n))} .$$

Ma $x_{1\sigma(\tau(1))} \cdots x_{i\sigma(\tau(i))} \cdots x_{j\sigma(\tau(j))} \cdots x_{n\sigma(\tau(n))} =$

$$= x_{1\sigma(1)} \cdots x_{i\sigma(j)} \cdots x_{j\sigma(i)} \cdots x_{n\sigma(n)} =$$

per ipotesi

$$= x_{1\sigma(1)} \cdots x_{j\sigma(j)} \cdots x_{i\sigma(i)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

quindi la somma è nulla. ■

Considero ora il caso in cui $V = K^n$ e la base fissata è la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$.

$D : K^n \times \dots \times K^n = (K^n)^n \longrightarrow K$ tale che $D(e_1, \dots, e_n) = 1$ si denota det ed è il determinante standard.

$(K^n)^n$ si interpreta come spazio delle matrici $n \times n$, dove $(w_1, \dots, w_n) \in (K^n)^n$ si interpretano come le <u>righe</u> di una matrice.

$D(e_1 \dots e_n) = \det E_n = 1.$

$$\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} = D((x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22})) = \text{Leibniz}$$

$$= \underset{\sigma = id}{x_{11} x_{22}} - \underset{\sigma = (1\,2)}{x_{12} x_{21}} .$$

Notazione: $\det(\underbrace{a_{1}, \ldots, a_{n}}_{\text{righe di } A}) = \det(A) = |A|$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = D(\{a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, a_{21}e_1 + \cdots) =$$

6 termini:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - \underset{\sigma = (2,3)}{a_{11}a_{23}a_{32}} + \underset{\sigma = (1,2,3)}{a_{12}a_{23}a_{31}} -$$

$$- \underset{\sigma = (1\,2)}{a_{12}a_{21}a_{33}} + \underset{\sigma = (1\,3\,2)}{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underset{\sigma = (1\,3)}{a_{13}a_{22}a_{31}} .$$

Regola di Sarrus per i determinanti 3×3.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

Non vale per $n = 4$ o $n > 4$.