Esercizi di Algebra

Esercizio 1 Siano G, H gruppi e sia $f : G \longrightarrow H$ omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $[G : Kerf] = |f(G)|$.

Esercizio 2 Sia G gruppo e H sottogruppo di G. Sia

$$N(H) = \{g \in G : \quad gHg^{-1} = H\}$$

Dimostrare che:

1. N(H) é un sottogruppo di G
2. H é un sottogruppo normale di N(H)
3. Se H é un sottogruppo normale di K, con K sottogruppo di G, allora K é contenuto in N(H)
4. H é un sottogruppo normale di G se e solo se N(H)=G

Esercizio 3 Sia G gruppo.

1. Sia $h \in G$ elemento di ordine n. Verificare che per ogni $g \in G$, l'elemento ghg^{-1} ha ordine n.
2. Sia H sottogruppo normale di G. Dimostrare che se H é ciclico di ordine finito, allora tutti i sottogruppi di H sono normali in G.

Esercizio 4 Dato G gruppo e N sottogruppo normale in G, si definisca

$$C_G(N) = \{g \in G : \quad gn = ng \quad \forall n \in N\}$$

1. Al variare di $g \in G$, si consideri la mappa $\sigma_g : N \to N$ definita da

   $$\sigma_g(n) = g^{-1}ng \qquad \forall n \in N$$

   Dimostrare che σ_g é un automorfismo di N.
2. Sia $(Aut(N), \circ)$ il gruppo degli automorfismi di N.
   Dimostrare che l'applicazione $\phi : G \longrightarrow Aut(N)$ definita da

   $$\phi(g) = \sigma_g \qquad \forall g \in G$$

   é un omomorfismo di gruppi.
3. Dimostrare che $ker\phi = C_G(N)$