Esercizi Algebra 1

Esercizio 1 Siano $m, n \in \mathbb{Z}$, si verifichi che $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad m|n$

Esercizio 2 Trovare tutte le relazioni d'equivalenza compatibili su $\mathbb{Z}$ tali che $2 \sim 3$.

Esercizio 3 Verificare se i seguenti insiemi siano dei sottogruppi e, qualora lo siano, verificare se sono normali:

- $H = \{a + b\sqrt{2} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ rispetto al gruppo $(\mathbb{R}, +)$
- $P = \{\frac{a}{p^n} \quad | \quad a \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0\}$ con p numero primo fissato, rispetto al gruppo $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$
- $x + \mathbb{R} = \{x + h \quad | \quad h \in \mathbb{R}\}$ rispetto al gruppo $(\mathbb{R}, +)$ (x qualunque).
- $\mathbb{R}$ rispetto a $(\mathbb{C}, +)$
- $(a + ib) + \mathbb{R}$ rispetto al gruppo $(\mathbb{C}, +)$.

Esercizio 4 Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che $m = n \cdot q$ con $q \in \mathbb{Z}$.
Sia $\varphi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ l'applicazione definita da

$$\varphi([x]_n) = [q \cdot x]_m \qquad , [x]_n \in \mathbb{Z}_n$$

Dimostrare che φ é un monomorfismo.

Esercizio 5 Dato G gruppo, per ogni $g \in G$ definiamo $\sigma_g : G \longrightarrow G$ l'applicazione

$$\sigma_g(x) = gxg^{-1} \qquad \forall x \in G$$

Dimostrare che $A = \{\sigma_g : \quad g \in G\}$ é un gruppo ripetto la composizione di funzioni $\circ$.