

Foglio Algebra 1

Esercizio 1 Siano (G, \cdot) e $(H, *)$ gruppi. Si consideri $G \times H$ con operazione binaria \circ definita nel seguente modo:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) := (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad h_1, h_2 \in H$$

Si verifichi che $(G \times H, \circ)$ è un gruppo.

Esercizio 2 Siano H_1, H_2 sottogruppi di G , dove $(G, +)$ è un gruppo abeliano. Si consideri

$$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

Si verifichi che $H_1 + H_2$ è un sottogruppo di G .

Esercizio 3 $(G, +)$ gruppo, H_1, H_2 sottogruppi di G .

1. Si verifichi che $(H_1 \cap H_2, +)$ è un sottogruppo.
2. $(H_1 \cup H_2, +)$ è un sottogruppo di G ? Giustificare la risposta.

Esercizio 4 Dato X insieme, definiamo

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ funzione biettiva}\}$$

Siano A, B insiemi tali che esiste un'applicazione biettiva $\phi : A \rightarrow B$.

1. Dimostrare che $S(A)$ è un gruppo
2. Dimostrare che esiste un isomorfismo di gruppi $\psi : S(A) \rightarrow S(B)$

Esercizio 5 Per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ si consideri la seguente relazione:

$$a \rho b \iff (ab - 3)(a - b) = 0$$

1. Dimostrare che ρ è una relazione d'equivalenza
2. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ quanti elementi ha $[a]_\rho$?
3. ρ è compatibile con $+$?

Esercizi 6 Consideriamo le seguenti relazioni:

a) $a, b \in \mathbb{Z} \quad a \rho b \iff a = -b \text{ o } a = b$

b) $a, b \in \mathbb{Z} \quad a \rho b \iff 2a = b \text{ o } a = b$

c) $a, b \in \mathbb{Z} \quad a \rho b \iff a = b \text{ o } ab = 5$

Determinare quali relazioni sono di equivalenza e tra queste, quali sono compatibili con $+$ e col \cdot .