

Esercizi Algebra 1

Esercizio 1 Dati X, Y, Z insiemi, verificare le seguenti uguaglianze:

- $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
- $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$
- $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$

Esercizio 2 Siano A, B insiemi, dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $A \cap B = A$
- $A \subseteq B$
- $A \cup B = B$

Esercizio 3 Verificare se le seguenti applicazioni siano iniettive, suriettive, biettive. Se sono biettive, trovare l'applicazione inversa.

- $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = x^2 + 15 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Sia $A = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 28\}$ e $\psi : \mathbb{N} \rightarrow A$ la mappa data da

$$\psi(x) = x + 28 \quad \forall x \in A$$

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da

$$f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ definita da:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ 1 & n \text{ dispari, multiplo di 3} \\ 2 & n \text{ dispari ma non multiplo di 3} \end{cases}$$

L'applicazione é iniettiva, suriettiva, biettiva? Giustificare la risposta.

Esercizio 5 Siano A, B insiemi non vuoti. Sia

$$\pi_A : A \times B \rightarrow A$$

l'applicazione data da:

$$\pi_A(a, b) = a \quad \forall (a, b) \in A \times B$$

Dimostrare che π_A é un'applicazione suriettiva.

Esercizio 6 Siano A, B insiemi con $A \neq B$ che implica $A \times B \neq B \times A$.
Dimostrare che l'applicazione

$$\sigma : A \times B \longrightarrow B \times A$$

definita da

$$\sigma((a, b)) = (b, a) \quad \forall (a, b) \in A \times B$$

é una biezione.

Esercizio 7 Determinare l'insieme delle parti dei seguenti insiemi:

- $A = \{2, 4, 8\}$
- $B = \{\{\emptyset\}, 2\}$