

Esercizi Algebra 1

Esercizio 1 Sia $f : A \rightarrow B$ applicazione tra due insiemi,

- Se $A', A'' \subseteq A$, allora $f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$
- Se $A', A'' \subseteq A$, allora $f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'')$
- Se $C \subseteq A$, allora $C \subseteq f^{-1}(f(C))$
- Se $B' \subset B$, allora $f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}(B')$

Esercizio 2 Dati A, B insiemi, $A \neq \emptyset$ e sia $\varphi : A \rightarrow B$ applicazione. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- a. esiste un'applicazione $\psi : B \rightarrow A$ tale che $\psi \circ \varphi = 1_A$
- b. φ é iniettiva

Esercizio 3 Sia

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

applicazione definita da

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{n dispari} \end{cases}$$

Provare che φ é iniettiva, suriettiva e costruire l'inversa.

Esercizio 4 Sia $A \neq \emptyset$. Definiamo le seguenti applicazioni:

$$\pi_1 : A \times A \rightarrow A, \quad \pi_1(a, b) = a \quad \forall (a, b) \in A \times A$$

$$\sigma : A \rightarrow P(A), \quad \sigma(a) = \{a\} \quad \forall a \in A$$

Si determini l'applicazione composta $\pi_1 \circ \sigma$. Tra le applicazioni π_1, σ e $\pi_1 \circ \sigma$ quali sono iniettive, suriettive, biettive? (*Hint*: Distinguere il caso in cui A ha un solo elemento da quello in cui A ha due o piú elementi).

Esercizio 5 Sia X insieme, consideriamo l'applicazione

$$\chi : P(X) \rightarrow P(X)$$

definita da

$$\chi(Y) = X \setminus Y \quad \forall Y \in P(X)$$

Dimostrare che χ é una biezione.

Esercizio 6 Sia B insieme, $A \subseteq B$. Definiamo la seguente applicazione

$$\epsilon : A \rightarrow B \quad \epsilon(a) = a \quad \forall a \in A$$

ϵ é detta *immersione*. Dimostrare che:

1. ϵ é iniettiva
2. ϵ é biettiva $\iff A = B$