Esercizi Algebra 1

Esercizio 1 Siano G e H gruppi ciclici di ordine finito.
Dimostrare che $G \times H$ é un gruppo ciclico finito se e solo se m e n sono coprimi.

Esercizio 2 Su $\mathbb{R}^2$ definiamo l'operazione $\cdot$:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

1. Verificare che $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ é un monoide
2. Verificare che la relazione

   $$(a, b) \sim (c, d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

   é una relazione d'equivalenza
3. Verificare che $\sim$ sia una relazione d'equivalenza compatibile con l'operazione $\cdot$

Esercizio 3 Sia G gruppo, $g \in G$ e supponiamo che l'ordine di g sia n.
Verificare che g^k sia un elemento di ordine $\dfrac{n}{d}$ dove $d = MCD(n, k)$.

Esercizio 4 Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, sia $d = MCD(a, b)$ e $m = mcm(a, b)$. Dimostrare che

1. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$
2. $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

Esercizio 5 Sia C_{10} un gruppo ciclico di ordine 10. Individuare i suoi sottogruppi e per ogni sottogruppo i generatori.

Esercizio 6 Individuare quali delle seguenti coppie sono gruppi isomorfi:

1. $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$
2. $\mathbb{Z}_{28}$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$
3. $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$