(i) $\|I[f]\|_2^2$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{1}{t^2} |f(\tfrac{1}{t})|^2$$

$$= \int_{0^+}^{+\infty} dt \, \frac{1}{t^2} |f(\tfrac{1}{t})|^2 + \int_{-\infty}^{0^-} dt \, \frac{1}{t^2} |f(\tfrac{1}{t})|^2$$

cambio di variabile $t' = \frac{1}{t}$, $dt' = -\frac{dt}{t^2}$

$$= -\int_{+\infty}^{0^+} dt' |f(t')|^2 - \int_{0^-}^{-\infty} dt' |f(t')|^2$$

$$= +\int_{0^+}^{+\infty} dt' |f(t')|^2 + \int_{-\infty}^{0^-} dt' |f(t')|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' |f(t')|^2 = \|f\|_2^2 \implies I[f] \text{ è anche in } L^2$$

e hanno la stessa norma

(ii) Usando il punto (i) e l'identità di Parseval, abbiamo:

$$\|-\pi E_i(-|\omega|)\|_2^2 \underset{\text{Parseval}}{=} 2\pi \left\|\frac{1}{t} \operatorname{atan}(t)\right\|_2^2 = 2\pi \left\|I\left[\operatorname{atan}(\tfrac{1}{t})\right]\right\|_2^2$$

$$\underset{\text{punto (i)}}{=} 2\pi \left\|\operatorname{atan}(\tfrac{1}{t})\right\|_2^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \left\|\frac{i\pi}{\omega}\left(1 - e^{-|\omega|}\right)\right\|_2^2$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \pi^2 \left(E_i(-|\omega|)\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\pi^2}{\omega^2}\left(1 - e^{-|\omega|}\right)^2$$

semplificando π^2 e portando dallo stesso lato si conclude. ✓

$$u_n(x) = \frac{n\,h(nx)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,h(x')}$$

Applichiamo a una funzione test:

$$\langle u_n(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{n\,h(nx)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,h(x')} \, \varphi(x)$$

cambio di variabile : $y = nx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{h(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,h(x')} \, \varphi\left(\frac{y}{n}\right)$$

Tende puntualmente a : $\dfrac{h(y)\,\varphi(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,h(x')}$

è dominato dalla

funzione integrabile: $\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|\right) \dfrac{|h(y)|}{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,h(x')\right|}$

$\Rightarrow$ per convergenza dominata, l'integrale

converge a : $\xrightarrow[n \to \infty]{} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{h(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,h(x')} \, \varphi(0) = \varphi(0)$

$$= \delta_0(\varphi)$$

Quindi in senso debole abbiamo:

$$u_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \delta(x)$$