

Esercizi su Diagonalizzazione  
Ingegneria Industriale e Navale 2019/2020 - decimo foglio

December 3, 2019

1. Sia  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Si dimostri che  $A$  ed  ${}^tA$  hanno gli stessi autovalori. Si può dire lo stesso per gli autovettori?
2. Per le seguenti matrici si dica se sono diagonalizzabili o meno:

$$\begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Si dica se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determinino una matrice diagonale  $D \in M_4(\mathbb{R})$  ed una matrice  $M$  invertibile tale che  $D = M^{-1} \cdot A \cdot M$ .

4. Si determinino  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  sapendo che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sono autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Si dica se  $A$  è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determini una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$ , tali che  $B^{-1} \cdot A \cdot B = D$ .

5. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la matrice  $A$  è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali? Per ogni tale  $a$  si determinino una matrice invertibile  $B$  e una matrice diagonale  $D$  tali che  $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$ .
- (b) Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la matrice  $A$  è diagonalizzabile sul campo dei numeri complessi? Per ogni tale  $a$  si determinino una matrice invertibile  $B$  e una matrice diagonale  $D$  tali che  $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$ .

6. Si determinino i valori di  $a \in \mathbb{R}$ , tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile. Per ogni tale  $a$  si trovi una base di  $\mathbb{R}^3$  che diagonalizza  $A$ .