Lezione 2 dicembre

lunedì 2 dicembre 2019 11:16

FORME BILINEARI & PRODOTTI SCALARI

Richiamo: abbiamo visto prodotto scalare standard: in $\mathbb{R}^n$:

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$v \bullet w := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

NORMA di v: $\|v\| := \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

$v \perp w$ ortog. $\iff v \bullet w = 0 \in \mathbb{R}$

Sulla base delle proprietà algebriche del prodotto scalare standard, definiamo i prodotti scalari in generale:

Def. V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

una funzione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dice PRODOTTO SCALARE su V se verifica:

① g è BILINEARE: (è lineare in ogni variabile)

$$g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$$

$$g(v, w_1 + w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2)$$

$$g(c \cdot v, w) = c \cdot g(v, w) = g(v, c \cdot w)$$

② g è SIMMETRICA: $g(v, w) = g(w, v)$

③ g è DEFINITA POSITIVA:

cioè $\forall\, v \in V$ si ha $g(v, v) \geq 0$

e $g(v, v) = 0 \iff v = 0_V$

Esempi: • Prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ verifica ①, ②, ③

- $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 b_1 + 2 a_2 b_2$$ verifica ①, ②, ③

g determina un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$, diverso dal prodotto scalare standard

- $g : C^0([a,b], \mathbb{R}) \times C^0([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$= \{$funzioni continue su $[a,b] \subseteq \mathbb{R}\}$

$$g(f, h) := \int_a^b f(x) \cdot h(x)\, dx$$

: oss. f continua, h continua $\Longrightarrow$ f · h continua
e continuità $\Longrightarrow$ integrabilità

$$g(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx \geq 0$$

$= 0 \iff f \equiv 0$

- Spazio di matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$:

idea: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

c'è un prodotto scalare standard:

$$g(A,B) = a_{11}b_{11} + a_{12}\cdot b_{12} + a_{21}\cdot b_{21} + a_{22}\cdot b_{22}$$

oss. che

$$A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{12} & * \\ * & a_{21}\cdot b_{21} + a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Se considero la TRACCIA di questo prodotto

$$Tr(A\cdot {}^tB) = g(A,B)$$

Tr M = somma degli elementi della diagonale principale $= m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn}$

$M \in M_n(\mathbb{R})$

In generale: $g : M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(A,B) := Tr(A\cdot {}^tB)$$

è un prodotto scalare su $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Def: (V, g) la coppia V sp. vett. su $\mathbb{R}$ e g prodotto scalare si dicono

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO:

Def.: NORMA DI UN VETTORE:

sia $v \in V$, $\|v\| := \sqrt{g(v,v)} \geq 0$

Esempi: Se g è prodotto scalare standard:

- $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

- Nello spazio $C^0([a,b], \mathbb{R})$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

- Nello spazio $M_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$\|A\| = \sqrt{Tr(A\cdot {}^tA)}$$

PROPRIETÀ: se $c \in \mathbb{R}$, $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$

RICHIAMO: Se $v, w \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $w \neq 0$

angolo tra v e w : $v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\varphi$

φ

$$\cos\varphi = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Vogliamo definire l'angolo convesso tra 2 vettori non nulli in (V, g) qualunque.

DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ:

$\forall\, v, w \in V$, si ha

$$\underbrace{|g(v,w)|}_{\text{VALORE ASSOLUTO DI } g(v,w) \in \mathbb{R}} \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Dim.: Se $w = 0_V$, la diseg. è vera:

$$g(v, \underset{\in V}{0_V}) = g(v, \overset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot v) = 0 \cdot g(v,v) = 0$$

$g(v, 0_V) = 0$; d'altra parte $\|0_V\| = \sqrt{g(0_V, 0_V)} = 0$

Diseg. ok.

Se, invece, $w \neq 0_V$, e cons.

$v + tw$ con $t \in \mathbb{R}$

$$0 \underset{\text{per la } ③}{\leq} g(v+tw, v+tw) \underset{①}{=} g(v,v) + g(v,tw) +$$

$$+ g(tw, v) + g(tw, tw)$$

$$= g(v,v) + \underbrace{t\, g(v,w) + t\, g(w,v)}_{} + t^2 \underbrace{g(w,w)}_{}$$

$$\underset{②}{=} \underbrace{\|v\|^2 + 2t\, g(v,w) + t^2 \cdot \underbrace{\|w\|^2}_{\neq 0}}$$

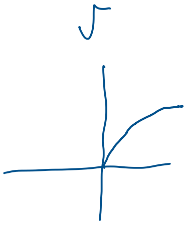
è una parabola in t, i suoi valori sono ≥ 0 $\forall t$ $\Rightarrow$ il discriminante è ≤ 0 :

$$\Delta = 4 \cdot \big(g(v,w)\big)^2 - 4\, \|w\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(g(v,w)\right)^2 - \|w\|^2 \cdot \|v\|^2 \le 0$$

$$\left(g(v,w)\right)^2 \le \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\sqrt{g(v,w)^2} \le \sqrt{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2}$$



$$= \boxed{\left|g(v,w)\right| \le \|v\| \cdot \|w\|}$$

COROLLARIO : se $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$:

posso cons.: $\dfrac{|g(v,w)|}{\|v\| \cdot \|w\|}$;

per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$\frac{|g(v,w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \le 1 \implies -1 \le \frac{g(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \le 1$$

Def.: v, w vettori non nulli in V

l'ANGOLO CONVESSO tra v e w

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{g(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \qquad \varphi \in [0, \pi]}$$

$$\cos \varphi = \frac{g(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Def: v e w si dicono ORTOGONALI

se $\boxed{g(v,w) = 0}$

~ · ~ · ~

BASI ORTOGONALI & ORTONORMALI:

Def.: (V, g) sp. vett. euclideo

Una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è ORTOGONALE se $v_1, .., v_n$ sono a 2 a 2 ortogonali:

$$g(v_i, v_j) = 0 \qquad \forall \; i \neq j$$

$\mathcal{B}$ si dice ORTONORMALE se:

- $\mathcal{B}$ è ortogonale, e
- ogni vettore di $\mathcal{B}$ è un VERSORE, cioè ha norma 1:

$$\forall i: \quad \|v_i\| = 1 \iff \|v_i\|^2 = 1$$

$$= g(v_i, v_i) = 1$$

Esempio: La base canonica: $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

rispetto al prodotto scalare standard è ortonormale, infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0$$
$$= 0$$

analog $\qquad e_i \bullet e_j = 0 \qquad$ per $i \neq j$

$$\|e_i\| = \sqrt{e_i \bullet e_i} = \sqrt{1} = 1$$

Problema: Dato uno spazio euclideo (V, g) qualunque, $\exists$-stono sempre basi ortonormali di V?

Risposta: sì.

PROCEDIMENTO DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT:

Sia $\mathcal{B} = \{w_1, .., w_n\}$ una base di V, e sia g un prodotto scalare su V

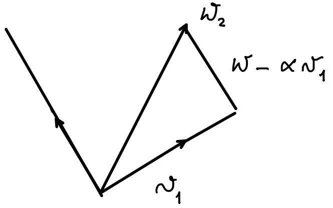
Allora a partire da $\mathcal{B}$ si può costruire una base ortonormale nel modo seguente:

Poniamo $\quad v_1 := \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = \underbrace{\dfrac{1}{\|w_1\|}}_{\in \mathbb{R}} \cdot w_1$

si ha: $\quad \|v_1\| = \left\| \dfrac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 \right\| = \left| \underbrace{\dfrac{1}{\|w_1\|}}_{>0} \right| \cdot \|w_1\|$

$$= \frac{1}{\|w_1\|} \cdot \|w_1\| = 1$$

Definisco ora:



$\tilde{v}_2 := w_2 - \alpha \cdot v_1$

con α tale che $g(\tilde{v}_2, v_1) = 0$, cioè tale che $\tilde{v}_2$ e v_1 siano ortogonali

Osservo che:

$$g(\tilde{v}_2, v_1) = g(w_2 - \alpha v_1, v_1) \underset{①}{=} g(w_2, v_1) - \alpha \underbrace{g(v_1, v_1)}_{= \underbrace{\|v_1\|^2}_{=1}}$$

$$= g(w_2, v_1) - \alpha \quad = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = g(w_2, v_1)$$

Quindi a w_2 devo togliere il vettore $g(w_2, v_1)\cdot v_1$; il vettore $g(w_2, v_1)\cdot v_1$ si dice **PROIEZIONE ORTOGONALE di w_2 su v_1**

$$\tilde{v}_2 := w_2 - g(w_2, v_1)\cdot v_1$$

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$$

Osserviamo che siccome $\tilde{v}_2$ è ortogonale a v_1, ogni multiplo di $\tilde{v}_2$ è ancora ortogonale a v_1, infatti: $g(c\cdot\tilde{v}_2, v_1) = c\cdot \underbrace{g(\tilde{v}_2, v_1)}_{=0} = 0$

In particolare: $\frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\cdot\tilde{v}_2$ è ortogonale a v_1.

Proseguo in modo analogo: $\tilde{v}_3 := w_3 - \alpha v_1 - \beta v_2$, e sceglierò α e β in modo che si abbia: $g(\tilde{v}_3, v_1) = 0$ e $g(\tilde{v}_3, v_2) = 0$, cioè $\tilde{v}_3$ ortogonale sia a v_1 che a v_2

sostituendo otteniamo: $g(w_3 - \alpha v_1 - \beta v_2, v_1) \underset{①}{=} g(w_3, v_1) - \alpha \underbrace{g(v_1, v_1)}_{=\|v_1\|^2 = 1} - \beta \underbrace{g(v_2, v_1)}_{=0 \text{ perché } v_2 \text{ e } v_1 \text{ sono ortogonali}} = g(w_3, v_1) - \alpha$

Quindi $w_3 - \alpha v_1 - \beta v_2$ è ortogonale a v_1 $\Longleftrightarrow$ $\alpha = g(w_3, v_1)$

Analogamente, imponiamo l'ortogonalità a v_2:

$$g(w_3 - \alpha v_1 - \beta v_2, v_2) \underset{①}{=} g(w_3, v_2) - \alpha \underbrace{g(v_1, v_2)}_{\substack{= 0 \text{ perché} \\ v_1 \text{ e } v_2 \\ \text{sono ortogonali}}} - \beta \underbrace{g(v_2, v_2)}_{= \|v_2\|^2 = 1} = g(w_3, v_2) - \beta$$

Quindi: $w_3 - \alpha v_1 - \beta v_2$ è ortogonale a $v_2 \iff \beta = g(w_3, v_2)$

Poniamo dunque $\tilde{v}_3 := w_3 - g(w_3, v_1)\cdot v_1 - g(w_3, v_2)\cdot v_2$

infine: $v_3 := \dfrac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|}$

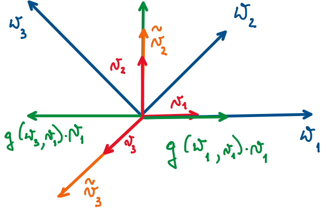
⋮

Definiamo il k-esimo vettore $\tilde{v}_k$

RICORSIVAMENTE:

$$\tilde{v}_k := w_k - \underbrace{\overbrace{g(w_k, v_1)}^{\in \mathbb{R}} \cdot v_1}_{\substack{\text{proiezione ortogonale di } w_k \\ \text{su Span}(v_1)}} - \overbrace{g(w_k, v_2)}^{\in \mathbb{R}} \cdot v_2 - \dots - \overbrace{g(w_k, v_{k-1})}^{\in \mathbb{R}} \cdot v_k$$

$$v_k := \frac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}$$

In questo modo si definisce la base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ a partire dalla base $\{w_1, \dots, w_n\}$