Prop. $\det({}^tA) = \det(A)$.

Dim. $A = (a_{ij})$, ${}^tA = (a'_{ij})$ con $a'_{ij} = a_{ji}$

$$\det({}^tA) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} =$$

questa è la formula di Leibniz per le colonne

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$ eventualmente moltiplicati in ordine diverso

$= \det(A)$ perché σ^{-1} descrive tutto S_n.

Quindi il det è anche multilineare altern. sulle colonne.

<u>Calcolo di determinanti di trasf. elem.</u>

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{\text{III tipo}}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \cancel{\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

multilin. nell'i-esima riga; alternante

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{\text{I tipo}}{=} \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_j \\ a_n \end{pmatrix} \overset{\text{IV tipo}}{=} -\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_j \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \text{ se } A \text{ è } n \times n.}$ $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ analogamente.

Prop. A triangolare sup.: $a_{ij} = 0$ $\forall (i,j)$ con $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$$

Dim. $\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, ma per ogni $\sigma \neq id$ c'è almeno un fattore nullo, perché ~~[illegible]~~ c'è almeno un'inversione.

Per calcolare il det posso operare trasf. elem. sulle matrici e ridurre a forma triangolare.

Es.
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

<u>Prop.</u> $\det A = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0 \iff$ le righe di A formano una base di $K^n \iff A$ è invertibile.

Infatti $D(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \iff v_1, \dots, v_n$ è una base di V.

<u>Prop.</u> A matrice a blocchi del tipo
$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \Rightarrow \det(A) = \det(B)\det(C)$$
B, C quadrate

Lo si dimostra con trasformazioni elementari; trasformando B e C in matrici triangolari superiori senza moltiplicare nessuna riga per uno scalare t, ma operando solo con trasf. di II, III e IV tipo.

Prima passo da B a B' triangolare, con k scambi di righe, lavorando solo sulle righe di B; poi passo da C a C' triangolare, con trasform. elem. sulle righe di C, di cui ℓ scambi di righe.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} B' & * \\ 0 & C' \end{pmatrix} = A'.$$

Allora $\det A' = \det B' \det C' = (-1)^k \det B \, (-1)^\ell \det C =$

triangolare

$= (-1)^{k+\ell} \det A \implies \det(A) = \det(B)\det(C).$

Teorema di Binet.

A, B matrici $n \times n$

Allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

In particolare l'applicazione

$\det : GL(n,K) \longrightarrow K - \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi (moltiplicativi).

Il nucleo è $SL(n,K) = \{A \in GL(n,K) \mid$

$\det(A) = 1\}$: gruppo lineare speciale.

<u>Dim:</u>

1° caso: $\det(B) = 0$, allora le righe di B sono lin. dipendenti $\Rightarrow$ il sistema lineare omogeneo $BX = 0$ ha soluzioni non nulle: $\exists\, v \neq 0, v \in K^n$ t.c. $Bv = 0$. Allora anche

$$\underset{(AB)v}{\underset{\parallel}{A(Bv)}} = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{anche } AB \text{ ha rango} < n \Rightarrow \det(AB) = 0$$

2° caso: $\det(B) \neq 0$.

Consideriamo l'applicazione

$f_B : M(n \times n, K) \longrightarrow K$ definita da

$$f_B(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

Vogliamo dim. che $f_B(A) = \det(A)$. Allora basta verif. che 1) $f_B(E_n) = 1$ (f_B vale 1 sulla base canonica)

2) f_B è multilineare e alternante nelle righe di A.

Infatti: $f_B(E_n) = \dfrac{\det(E_n B)}{\det B} = 1$.

2) Sia A una matrice con $a_j = \lambda a_j' + \mu a_j''$ $\Rightarrow$

$(AB)_{jk} = a_j \cdot b^k = (\lambda a_j' + \mu a_j'') b^k =$

$= \lambda (a_j' \cdot b^k) + \mu (a_j'' \cdot b^k)$, perciò la riga j-esima di AB è comb. lin. di 2 righe. Ma il det è lineare nella j-esima componente $\Rightarrow$

$\det(AB) = \lambda \det(A'B) + \mu \det(A''B)$ $\Rightarrow$

$f_B(A) = \lambda f_B(A') + \mu f_B(A'')$.

Se A ha 2 righe uguali, anche AB ha 2 righe uguali $\Rightarrow$ $\det(AB) = 0$ $\Rightarrow$ $f_B(A) = 0$. Allora $\det(A) = f_B(A)$.

<u>Corollario 1.</u>

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Dim. $AA^{-1} = E_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 = \det(A)\det(A^{-1})$.

<u>Corollario 2</u>

Se $B = S^{-1}AS$ ossia A, B sono simili, hanno lo stesso determinante.

<u>Def.</u> $f: V \to V$ endomorfismo. Si definisce $\det(f) = \det M_B(f)$, qualunque sia B base di V. Perché le matrici di f rispetto a basi diverse sono simili.

f è un isomorfismo di V in sé (automorfismo) se e solo se $\det(f) \neq 0$

Formula di Laplace per lo sviluppo dei determinanti:

Sia $A = (a_{ij})$, $n \times n$

Denotiamo A_{ij} la seguente matrice $n \times n$:

$$\begin{array}{cc} & \\ i \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline & & & & 0 & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \\ & \uparrow j \end{array}$$

In A abbiamo sostituito alla riga i-esima e_j, cioè tutto 0 tranne 1 al posto ij, e alla colonna j-esima e_i.

Poniamo poi $\tilde{a}_{ij} = |A_{ji}|$: indici scambiati

e $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = {}^t(|A_{ij}|)$: è detta matrice aggiunta di A.

Teorema $\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)\, E_n$.

Conseguenza: Formula per l'inversa di A.

Sia A invertibile, dunque con $\det(A) \neq 0$.

Allora si ha: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, \tilde{A}$.

Esempio $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}$, $\tilde{a}_{22} = a_{11}$, $\tilde{a}_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{21}$,

$\tilde{a}_{12} = -a_{12} \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

$n = 3$

Dim. del Teorema.

$$A_{kj} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \quad\quad\quad\uparrow j \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}$$

Sostituisco alla I riga $\rightarrow$ I $+ a_{1j}$(k-esima), alla II $\rightarrow$ II $+ a_{2j}$(k-es.), ecc.

e ottengo

$$\begin{array}{c} \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ e_j \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

il determ. non è cambiato.

Analogam. se faccio l'analoga trasformazione sulle colonne: ottengo

$$\det(A_{kj}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow k \\ \\ \end{matrix} =$$

il det. è multilineare sulle colonne

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{k1} & & 1 & & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

: ho così 2 espressioni per $|A_{kj}| = \tilde{a}_{jk}$.

Ora considero $A\tilde{A} = (b_{ik})$:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{a}_{jk} = \sum_j a_{ij} |A_{kj}| =$$

$$= \sum_j a_{ij} \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \sum a_{ij} e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

linearità del det rispetto al k-esimo argomento

Ma $\sum a_{ij} e_j = a_i$ la riga i-esima di A, che qui va nella riga k-esima. Quindi trovo

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \leftarrow k = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ \det(A) & \text{se } i = k \end{cases} = \det(A)\,\delta_{ik}.$$

Perciò $A\tilde{A} = \det(A) E_n$. Per calcolare $\tilde{A}A$ si lavora nello stesso modo sulle colonne.

Data A, $n \times n$, chiamiamo A'_{ij} la sua sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima: è detta minore complementare dell'elemento a_{ij}.

Confrontiamo i determinanti delle matrici A_{ij}, definita prima, e A'_{ij}.
Si ha:

$$\underset{\tilde{a}_{ji}}{\overset{\|}{\det(A_{ij})}} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}).$$

Infatti da A_{ij} con $i-1$ scambi di righe e $j-1$ scambi di colonne passo a
$\begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \\ | & A'_{ij} \\ 0 & \end{pmatrix}$, che ha lo stesso determinante di A'_{ij}, perché è a blocchi.

Quindi ottengo l'espressione voluta, perché $(i-1)+(j-1)$ ha la stessa parità di $i+j$.

Def. $(-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$ è detto complemento algebrico o cofattore dell'elemento a_{ij} di A.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -8 - 6 - 20 - 2 =$$

$$= -36$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{36} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -4 & -4 & 4 \\ -26 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \\ 26 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 10 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

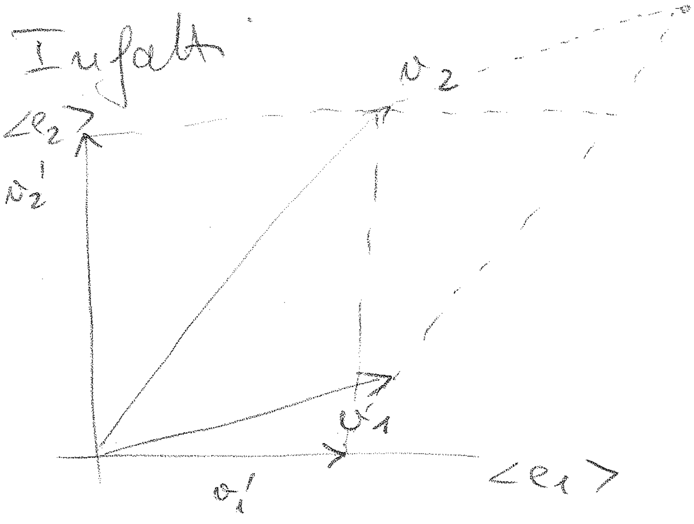
$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -26 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

ecc.

Infatti



l'area è (base)·(altezza).

Modifico v_1 e v_2 senza cambiare l'area:

$v_1 \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ v_1'}}{v_1 + \lambda v_2}$ in modo che sia in $\langle e_1 \rangle$

Passando da $P(v_1, v_2)$ a $P(v_1', v_2)$ l'area non cambia perché non cambia l'altezza perpendic. a v_2.

Poi ripeto $v_2 \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ v_2'}}{v_2 + \mu v_1'}$ in modo che sia in $\langle e_2 \rangle$

Ottengo un rettangolo di lati v_1', v_2'.

$$D\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} v_1 + \lambda v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 + \mu v_1' \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$$

perché ho operato con trasf. elementari.

Ma $v_1' = a e_1$, $v_2' = b e_2 \Rightarrow D\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$. L'area è $|a||b|$.

__Teorema__ di Laplace per lo sviluppo di un determinante (I Teor. di Laplace)

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

1) Sia i un indice di riga fissato. Allora

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})}$$

prodotto dell'elem. a_{ij} per il suo complemento algebrico

sviluppo di $|A|$ secondo la riga i-esima.

2) Sia j un indice di colonna fissato.
Allora

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$$

sviluppo di $|A|$ secondo la j-esima colonna.

Dim. Sappiamo che $A\tilde{A} = (b_{ij})_{ij} = \det(A) E_n = \det(A) (\delta_{ij})_{ij}$

Allora $\forall i$ $\quad b_{ii} = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ji} = \sum_{j} a_{ij} |A_{ij}| \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A'_{ij}|$.

Se si considera $\tilde{A} A$, si trova l'analoga espressione sulle colonne.

■

Esempi

1) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$ sviluppo secondo la terza riga

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -3 + 6 = 3.$$

2) $$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{2^a \text{ colonna}}{=} -3 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(8 - 42) = 3 \cdot 34 = 102.$$

3) Risoluzione di sistemi lineari omogenei 2×3.

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Ha come soluzione $\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$.

Analogamente per i sistemi lineari $(n-1) \times n$.

Risoluzione dei sistemi lineari $n \times n$ con matrice dei coefficienti non singolare = non degenere = di rango massimo = invertibile.

In tal caso c'è una e una sola soluzione qualunque sia la colonna dei termini noti.

<u>Teorema di Cramer</u>.

A $n \times n$ invertibile, $b \in K^n$

$Ax = b$: ha una e una sola soluzione data da

$$x_j = \frac{|a^1 \dots a^{j-1}\, b\, a^{j+1} \dots a^n|}{|A|} \qquad \forall j = 1, \dots, n.$$

<u>Oss.</u> La soluzione è $x = A^{-1} b$.

<u>Dim</u> Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ la soluzione.

Allora $Ax = b \iff x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots = b$.

Perciò $\det(a^1 \dots a^{j-1}\, b\, a^{j+1} \dots a^n) =$

$= \det(a^1 \dots a^{j-1}\; x_1 a^1 + \dots + x_n a^n\; a^{j+1} \dots a^n) =$

$\overset{\text{multilinearità}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \det(a^1 \dots a^{j-1}\, a^i\, a^{j+1} \dots a^n) = x_j \det(A)$. ∎

Volume di parallelepipedi multidimensionali.

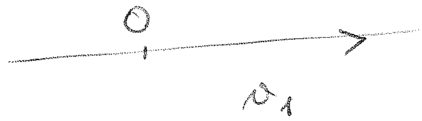
Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di $\mathbb{R}^n$.

Def. parallelepipedo generato da $v_1, \dots, v_n$ è

$$\underset{\displaystyle\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{P(v_1, \dots, v_n)}} \overset{\text{def}}{=} \left\{ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le \lambda_i \le 1, \\ i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

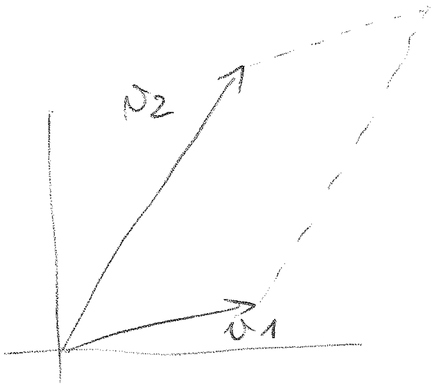
Esempio

$n = 1$ $\quad P(v_1) = \{\lambda_1 v_1 \mid 0 \le \lambda_1 \le 1\}$



è il segmento

$n = 2$



$P(v_1, v_2)$ è il parallelogramma

$\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1\}$

Se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti il parallelogr. è "degenere": v_1, v_2 vettori paralleli.

L'area di $P(v_1, v_2)$ è $|D(v_1, v_2)|$ valore assoluto del determinante (che vale 1 nella base canonica)

Questo si estende a dimensione $n \geq 1$ qualunque.

Si def. volume del parallel. $P(v_1, \ldots, v_n)$ $|D(v_1, \ldots, v_n)|$: è il prodotto del volume $(n-1)$-dimensionale di una base per la relativa altezza.

— · —

Oss. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ endomorfismo

$f = L(A)$; $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ vettori

$D(f(v_1), f(v_2)) = \det(A)\, D(v_1, v_2)$

(calcolo in coordinate).

Dunque $\det(A)$ misura il rapporto fra le aree dei 2 parallelogrammi.

Questo si estende a dimensione n.