Lezione 4 dicembre 2019
mercoledì 4 dicembre 2019 11:19

OPERATORI SIMMETRICI (o AUTOAGGIUNTI)

Premessa: Rivediamo le forme bilineari $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

se V ha dim n e fisso base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow$ a g si può associare una matrice

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \left(g(v_i, v_j)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & g(v_1,v_2) & \cdots \\ g(v_2,v_1) & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Si ha: se $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \in V$

$w = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n \in V$

$$g(v,w) = {}^t v \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot w = \overbrace{\overbrace{(c_1 \cdots c_n)}^{1\times n} \cdot \overbrace{M_{\mathcal{B}}(g)}^{n\times n} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}^{n\times 1}}^{1\times 1} \in \mathbb{R}$$

con abuso di notazione: $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ (indico ancora con v la colonna delle sue coordinate e analog. per w)

Infatti: per la bilinearità di g

$$g(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, d_1 v_1 + \dots + d_n v_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i d_j \, g(v_i, v_j)$$
$$= {}^t v \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot w$$

Es: $g = \bullet$ PRODOTTO SCALARE STANDARD

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E} \text{ base canonica}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$M_{\mathcal{E}}(\bullet) = \begin{pmatrix} e_1 \bullet e_1 & e_1 \bullet e_2 & \cdots & e_1 \bullet e_n \\ e_2 \bullet e_1 & e_2 \bullet e_2 & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

OSS.: In generale, g bilineare è simmetrica

$\Longleftrightarrow M_{\mathcal{B}}(g)$ è una matrice simmetrica (in una qualunque base)

infatti

$$\begin{array}{rcl} \left(M_{\mathcal{B}}(g)\right)_{ij} & = & g(v_i, v_j) \\ & & \parallel \\ \left(M_{\mathcal{B}}(g)\right)_{ji} & = & g(v_j, v_i) \end{array}$$

OSS.: Supp. g sia un prodotto scalare: bilineare, simmetrica e definita positiva.

Grazie a Gram-Schmidt, sappiamo che $\exists\, C$

una base ortonormale di V rispetto a g. In tale base si ha:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Infatti: se

$$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$g(w_1, w_1) = 1, \quad \dots, \quad g(w_n, w_n) = 1$$

$$g(w_i, w_j) = 0 \qquad \text{se } i \neq j$$

* * *

Def: (V, g) spazio euclideo : g prodotto scalare

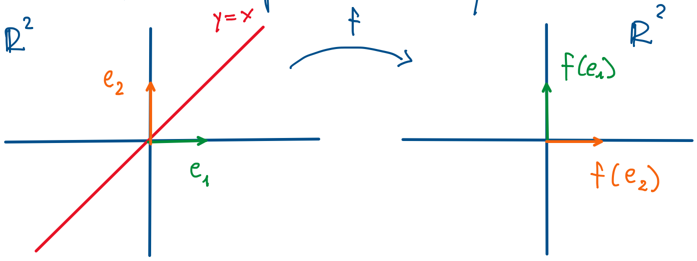
$f: V \longrightarrow V$ operatore si dice SIMMETRICO o AUTOAGGIUNTO se vale

$\forall\, v, w \in V$

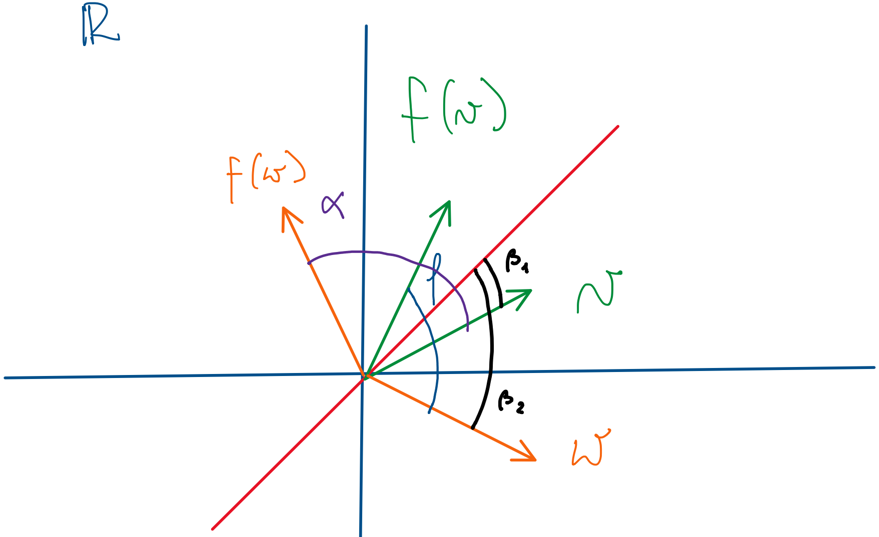
$$g(\underbrace{f(v)}_{\in V}, w) = g(v, f(w))$$

es.: $g = \cdot$ $\qquad f(v) \cdot w = v \cdot f(w)$

es: RIFLESSIONE rispetto alla retta $y=x$



$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Supp.: $\|v\|=1$; quindi $\|f(v)\|=1$

e supp. $\|w\|=1$, $\|f(w)\|=1$

In questo caso abbiamo:

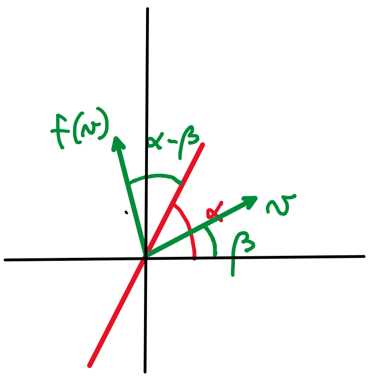
$$f(v)\cdot w = \|f(v)\|\cdot\|w\|\cdot\cos\rho = 1\cdot 1\cdot\cos\rho$$
$$v\cdot f(w) = \|v\|\cdot\|f(w)\|\cdot\cos\alpha = 1\cdot 1\cdot\cos\alpha$$

Per la riflessione si ha $\alpha=\rho$, quindi $\cos\alpha=\cos\rho$

Infatti: $\rho=\beta_1+\beta_2$, $\alpha=\beta_1+\beta_2$.

$\Rightarrow$ le RIFLESSIONI sono operatori simmetrici

In generale si ha:



Se $\|v\|=\rho$, $v=\begin{pmatrix}\rho\cos\beta\\ \rho\sin\beta\end{pmatrix}$

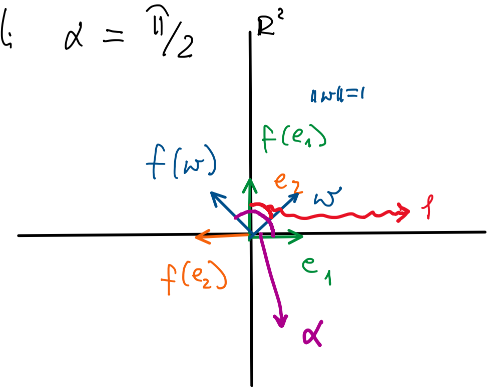
e $f(v)=\begin{pmatrix}\rho\cos(2\alpha-\beta)\\ \rho\sin(2\alpha-\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\,(\cos2\alpha\cos\beta+\sin2\alpha\sin\beta)\\ \rho\,(\sin2\alpha\cos\beta-\cos2\alpha\sin\beta)\end{pmatrix}$

$$\Big|$$

$$\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\rho\cos\beta\\ \rho\sin\beta\end{pmatrix}$$

Es: operatore non simmetrico: ROTAZIONE, ad esempio

di $\alpha = \pi/2$



$f(e_1) \cdot w \overset{?}{=} e_1 \cdot f(w)$

$= \underbrace{\|f(e_1)\| \cdot \|w\|}_{=1} \cdot \cos\varphi \quad \overset{?}{=} \underbrace{\|e_1\| \cdot \|f(w)\|}_{1} \cdot \cos\alpha$, ma $\alpha \neq \varphi$ in generale

Prop: Sia $f: V \longrightarrow V$ operatore simmetrico.
Sia e una base ORTONORMALE rispetto a g.
Allora $A = M_e^e(f)$ è simmetrica

Dim.

$$g(f(v), w) = {}^t\underbrace{f(v)}_{A \cdot v} \cdot \underbrace{M_e(g)}_{e \text{ è ORTONORM.} = I_n} \cdot w = {}^t(A \cdot v) \cdot I_n \cdot w = {}^tv \cdot {}^tA \cdot w$$

perchè f simmetrico

$$= g(v, f(w)) = {}^tv \cdot M_e(g) \cdot f(w) = {}^tv \cdot I_n \cdot A \cdot w$$

$$= {}^tv \cdot A \cdot w$$

f simmetrico $\Longrightarrow \forall\, v, w$ si ha ${}^tv \cdot A \cdot w = {}^tv \cdot {}^tA \cdot w$

se calcolo per $v, w \in \{w_1, \dots, w_n\} = e$ dove e è una base ortonormale

$$= \begin{cases} {}^tw_i \cdot A \cdot w_j = a_{ij} \\ {}^tw_i \cdot {}^tA \cdot w_j = ({}^tA)_{ij} = a_{ji} \end{cases} =$$

$\Longrightarrow A$ è simmetrica

Es.: le matrici delle riflessioni di $\mathbb{R}^2$ nella base canonica hanno la forma $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ e sono effettivamente simmetriche

TEOREMA SPETTRALE PER MATRICI e OPERATORI SIMM.

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica.
Allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile con una base ortonormale.

CONSEGUENZA: Ogni operatore simmetrico $f : V \to V$ è diagonalizzabile con base ortonormale.

LEMMA: A matrice simmetrica reale
$\Rightarrow$ $p_A(x)$ ha n radici reali (non necess. distinte)
(ovvero: $p_A(x)$ si fattorizza nel prodotto di fattori di primo grado)

Dim.: Ho $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$

posso pensare $p_A(x) \in \mathbb{C}[x]$

Per il Teorema Fond. dell'Algebra, $p_A(x)$ ha n radici complesse (contate con le rispettive molteplicità)

Mostriamo che queste radici sono, in realtà, REALI.

Cons: $L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$L_A(v) = A \cdot v$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice qualunque di $p_A(x) = p_{L_A}(x)$; quindi $\lambda \in Sp(L_A)$ spettro ed $\exists$ un autovettore $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$:

$$= \left(\begin{array}{l} L_A(v) = \lambda \cdot v \\ \\ A \cdot v = \lambda \cdot v \end{array} \right.$$

TRUCCO : Considerano

le entrate sono i coniugati $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$

abbiamo $A = \bar{A}$ perchè A è reale

$$ {}^t v \cdot A \cdot \bar{v} = {}^t v \cdot (A \cdot \bar{v}) = {}^t v \cdot (\bar{A} \cdot \bar{v}) = {}^t v \cdot (\overline{A \cdot v}) = {}^t v \cdot (\overline{\lambda v}) = {}^t v \cdot \bar{\lambda} \cdot \bar{v} \boxed{= \bar{\lambda} \cdot {}^t v \cdot \bar{v}} $$

$v \in \mathbb{C}^n$, $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $z_i \in \mathbb{C}$, $z_i = a_i + i b_i$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$ coniugati $\bar{z}_i = a_i - i b_i$

=

$$ = ({}^t v \cdot A) \cdot \bar{v} = ({}^t v \cdot {}^t A) \cdot \bar{v} = {}^t(A \cdot v) \cdot \bar{v} = {}^t(\lambda \cdot v) \cdot \bar{v} \boxed{= \lambda \cdot {}^t v \cdot \bar{v}} $$

A è simmetrica

${}^t A = A$

$$ (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \underbrace{{}^t v \cdot \bar{v}}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda} $$

$$ \Downarrow $$

$$ \lambda \in \mathbb{R} $$

$$ v = \begin{pmatrix} a_1 + i b_1 \\ a_2 + i b_2 \\ \vdots \\ a_n + i b_n \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 - i b_1 \\ a_2 - i b_2 \\ \vdots \\ a_n - i b_n \end{pmatrix} $$

$$ {}^t v \cdot \bar{v} = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2 \overset{> 0}{\in} \mathbb{R} $$

$$ (a_1 + i b_1) \cdot (a_1 - i b_1) = a_1^2 + b_1^2 = |z|^2 $$

Dim. del Teorema Spettrale:

$f : V \longrightarrow V$ simmetrico

Dim. per induzione su $n = \dim V$

Se $\dim V = 1$, $M_B^B(f) = \underset{1 \times 1}{(a)}$ diagonale banalmente

Supp. vero per ogni operatore simmetrico su uno spazio di dimensione $n-1$ e dimostriamo che vale allora in dimensione n.

Per il Lemma, $\exists$ un autovalore reale λ e un autovettore reale $v \in V$:

Cons.: $U = \{v\}^\perp$ sottospazio ortogonale

$U := \{ u \in V \mid g(u, v) = 0 \}$

Oss.: $\dim U = n-1$: è un iperpiano; infatti si può verificare che $V = \mathrm{Span}(v) \oplus U$, quindi $n = 1 + \dim U$

Cons.: la restrizione di f a U:

$$f\big|_U : U \longrightarrow V$$

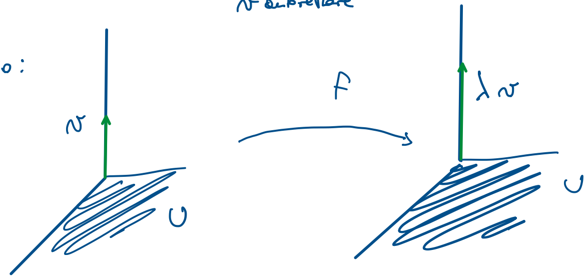
Affermo ora che f simmetrico $\Longrightarrow$ $f(U) \subseteq U$

infatti: sia $u \in U = \{v\}^\perp$

$$g(u,v) = 0$$

$$g(f(u),v) \overset{f\text{ simmetrico}}{=} g(u, \underbrace{\underbrace{f(v)}_{}) = g(u, \underbrace{\lambda v}_{}}_{v\text{ autovettore}}) \overset{\text{bilineare}}{=} \lambda \cdot g(u,v) = 0$$

Ad esempio:



$\Longrightarrow$ $f\big|_U : U \longrightarrow U$ è un operatore di U, e si verifica facilmente che è ancora simmetrico

$\Longrightarrow$ per ipotesi induttiva, $\exists$ base ortonormale di U che diagonalizza $f\big|_U$: $\{u_1, .., u_{n-1}\}$

$\Longrightarrow$ Cons. $\left\{\frac{v}{\|v\|}, u_1, .., u_{n-1}\right\}$ è base ortonormale di V che diagonalizza f