ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 8

Trieste, 5 dicembre 2019

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B_1 formata da $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, e B' da $(1,0)$, $(1,1)$.

2. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 1 & 2 & 3 & ... & 3 \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}.$$

4. Siano $x_1, ..., x_n$ delle indeterminate. Dimostrare che

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & ... & x_n^2 \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Si tratta del determinante detto *di Vandermonde*. (Suggerimento: trasformare la prima colonna in $(1, 0, 0...0)$, con trasformazioni elementari sulle righe come segue: togliere a ogni riga un multiplo della riga precedente, ...)

5. Dati n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$, con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, dimostrare che esiste esattamente un polinomio reale $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}$, di grado al più $n - 1$, tale che $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$.

(Suggerimento: interpretare $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$ come un sistema lineare di n equazioni in n incognite $a_0, \ldots, a_{n-1}$: qual è la matrice dei coefficienti di questo sistema lineare?)