- Esercizi per casa: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) (i) Mostra che una generica matrice 2×2 hermitiana si scrive come: $x_0 \mathbb{I} + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ con $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

(ii) Trova condizione su (x_1, x_2, x_3) tale che la matrice è diagonale nella stessa base di $\sigma_2 - \sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & +1 \end{pmatrix}$.

[Usa che: $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$, $[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$, $[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$]

2) Dato $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ sistema ortonormale completo su H spazio di Hilbert, considera:

$\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ definito come:

$$f^{(n)} \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{(k)} - b_{n+1} e^{(n+1)}\right) \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_{n+1}|^2}}$$

dove $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 2}$ sono due successioni fissate.

(i) Trova condizione su $\{b_n\}_{n\geq 2}$ in modo che $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ sia un sistema ortonormale

(ii) Dimostra che $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ è un sistema ortonormale completo $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1} \notin \ell^2$.

[Suggerimento: per mostrare ($\Leftarrow$) considera un vettore $v \in H$ tale che $(f^{(n)}, v) = 0$, $\forall n \geq 1$. Sviluppa v nel sistema $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$, ovvero $v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$, e mostra che $(f^{(n)}, v) = 0$ $\forall n \geq 1$ implica che: $\alpha_n = \frac{a_n}{a_1} \alpha_1$ $\forall n \geq 1$ (usa induzione su n), quindi concludi.

Per mostrare ($\Rightarrow$) usa che se il sistema è completo allora $z_N = \sum_{n=1}^{N} \beta_n f^{(n)}$ al variare di N generano un sottospazio denso. Procedi per assurdo mostrando che se $a_n \in \ell^2$ allora il vettore $z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(n)}$ è ortogonale a tutti gli z_N.]