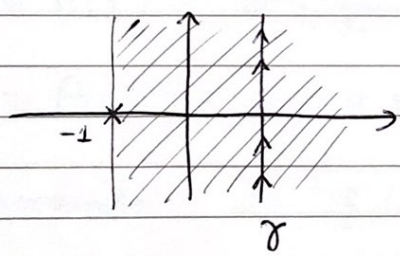
$$g_1(s) = \frac{e^{-s} + s - 1}{s^2(s+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[g_1(s)](x) = \int_\gamma \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{-s}+s-1}{s^2(s+1)} e^{sx}$$

Singolarità di $g_1(s)$: * polo di ordine 1 in $s=-1$

* singolarità rimuovibile in $s=0$

$\Rightarrow$ solo $s=-1$ è singolarità, dunque l'ascissa di convergenza è $\lambda_0 = -1$.



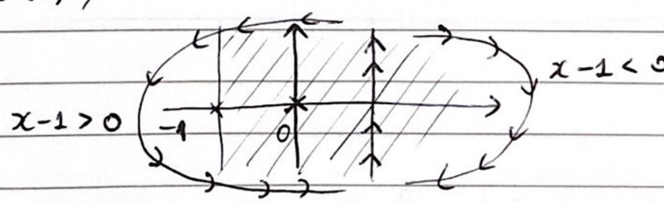
γ: cammino arbitrario nella regione di olomorfia

Per calcolare: $\int_\gamma \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{-s}+s-1}{s^2(s+1)} e^{sx}$ dividiamo in due termini:

$$= \underbrace{\int_\gamma \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{s(x-1)}}{s^2(s+1)}} + \underbrace{\int_\gamma \frac{ds}{2\pi i} \frac{s-1}{s^2(s+1)} e^{sx}}$$

primo termine (I) ; secondo termine (II)

Primo termine:



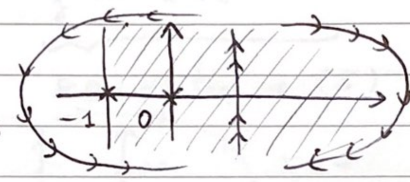
$$(I) = \theta(x-1)\left(\operatorname{Res}_{\frac{e^{s(x-1)}}{s^2(s+1)}}[0] + \operatorname{Res}_{\frac{e^{s(x-1)}}{s^2(s+1)}}[-1] \right)$$

$$= \theta(x-1)\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{s(x-1)}}{s+1}\right)\Bigg|_{s=0} + \frac{e^{1-x}}{(-1)^2} \right)$$

$$= \theta(x-1)\left(\left(e^{s(x-1)}\left(\frac{x-1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right)\right)\Big|_{s=0} + e^{1-x}\right)$$

$$= \theta(x-1)\left(x-2+e^{1-x}\right)$$

Secondo termine:



$$(\mathrm{II}) = \theta(x)\left(\mathrm{Res}_{\frac{s-1}{s^2(s+1)}e^{sx}}[0] + \mathrm{Res}_{\frac{s-1}{s^2(s+1)}e^{sx}}[-1]\right)$$

$$= \theta(x)\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{s-1}{s+1}e^{sx}\right)\Big|_{s=0} + \frac{-2}{(-1)^2}e^{-x}\right)$$

$$= \theta(x)\left(\left(e^{sx}\left(\frac{x(s-1)}{s+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{(s+1)^2}\right)\right)\Big|_{s=0} - 2e^{-x}\right)$$

$$= \theta(x)\left(2-x-2e^{-x}\right)$$

Sommando: $\mathcal{L}^{-1}[g_1(s)](x) = (\mathrm{I})+(\mathrm{II}) = \theta(x-1)(x-2+e^{1-x}) + \theta(x)(2-x-2e^{-x})$

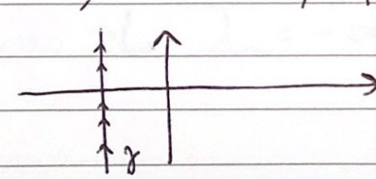
Vediamo che a grande x $\theta(x-1)(x-2)$ e $\theta(x)(2-x)$ si cancellano, quindi la funzione decresce come $C_1 e^{-x}$, confermando che l'ascisse di convergenza è $\lambda_0 = -1$.

$$g_2(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

Singolarità: $*$ $\pm i$ sono singolarità rimuovibili

$\Rightarrow$ la funzione non ha singolarità, è intera, dunque $\lambda_0 = -\infty$.

$$\mathcal{L}^{-1}[g_2(s)](x) = \int_\gamma \frac{ds}{2\pi i}\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}e^{sx}$$

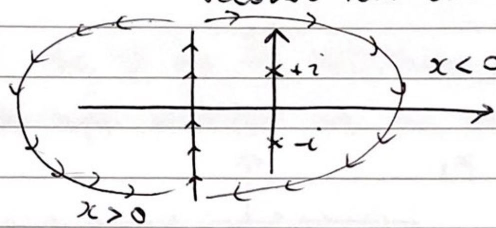


γ può essere preso ovunque

Come nell'esempio sopra dividiamo:

$$= \underbrace{\int_\gamma \frac{ds}{2\pi i}\, \frac{1}{1+s^2}\, e^{sx}}_{\text{primo termine: (I)}} + \underbrace{\int_\gamma \frac{ds}{2\pi i}\, \frac{1}{1+s^2}\, e^{s(x-\pi)}}_{\text{Secondo termine: (II)}}$$

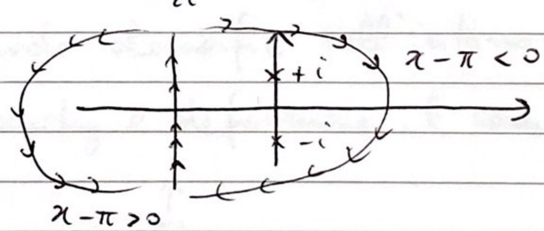
Primo termine:



$$(\mathrm{I}) = \theta(-x)\left(-\mathrm{Res}_{\frac{1}{1+s^2}e^{sx}}[+i] - \mathrm{Res}_{\frac{1}{1+s^2}e^{sx}}[-i]\right)$$

$$= \theta(-x)\left(-\frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{-2i}e^{-ix}\right) = -\theta(-x)\sin x$$

Secondo termine:



$$(\mathrm{II}) = \theta(\pi-x)\left(-\mathrm{Res}_{\frac{1}{1+s^2}e^{s(x-\pi)}}[+i] - \mathrm{Res}_{\frac{1}{1+s^2}e^{s(x-\pi)}}[-i]\right)$$

$$= \theta(\pi-x)\left(-\frac{1}{2i}e^{i(x-\pi)} - \frac{1}{-2i}e^{-i(x-\pi)}\right)$$

$$= \theta(\pi-x)\left(\frac{1}{2i}e^{ix} + \frac{1}{-2i}e^{-ix}\right) = \theta(\pi-x)\sin x$$

Sommando: $\mathcal{L}^{-1}[g_2(s)](x) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) = \sin(x)\left(\theta(\pi-x) - \theta(-x)\right)$

$$= \sin(x)\left(\theta(x) - \theta(x-\pi)\right)$$

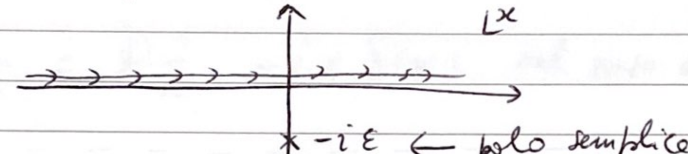
$\theta(\pi-x) - \theta(-x) = \theta(x) - \theta(x-\pi)$ è 1 per x tra 0 e π e 0 fuori da questo intervallo $\Rightarrow$ la funzione è identicamente nulla per grandi x, questo conferma che $\lambda_0 = -\infty$.

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{x+i\epsilon} \rightarrow \text{applichiamo ad una funzione test}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x+i\varepsilon} \varphi(x)$$

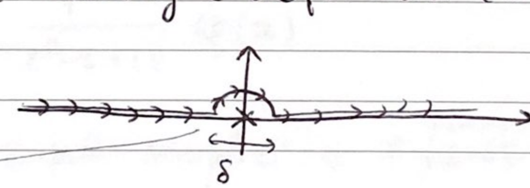
Possiamo assumere che φ sia la restrizione all'asse reale di una funzione olomorfa almeno in un intorno di $x=0$.

Quindi:

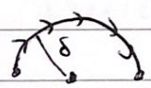


Nel limite $\varepsilon \to 0^+$ il polo collide con il cammino di integrazione. Usando olomorfia nell'intorno dell'origine, possiamo usare Cauchy e deformare il cammino:

$\varepsilon \to 0^+$



$-\gamma_\delta$



rimuoviamo i punti sull'asse reale in $[-\delta, \delta]$ e deformiamo nell'arco di raggio δ

Dunque:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x+i\varepsilon} \varphi(x) = \int_{-\infty}^{-\delta} dx \, \frac{1}{x} \varphi(x) + \int_{+\delta}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x} \varphi(x)$$

$$+ \int_{-\gamma_\delta} dx \, \frac{1}{x} \varphi(x)$$

senso orario

Siccome per olomorfia il risultato non dipende dal δ arbitrario scelto, possiamo prendere il limite $\delta \to 0$:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{+\delta}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x} \varphi(x) \equiv \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x} \varphi(x)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\gamma_\delta} dx\,\frac{1}{x}\varphi(x) = -\underbrace{\lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta} dx\,\frac{1}{x}\varphi(x)}_{} = -\frac{1}{2}\,2\pi i\,\varphi(0) = -\pi i\,\varphi(0)$$

$$= -\pi i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta(x)\varphi(x)$$

nel limite coincide con $\frac{1}{2}\times$ integrale su un intero cerchio attorno al polo

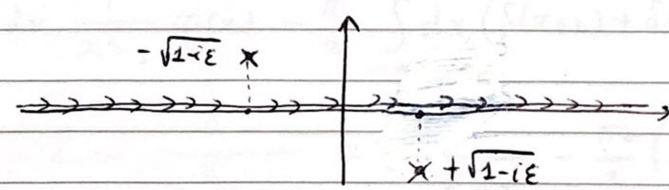
Pertanto abbiamo mostrato che:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\,\delta(x)$$ nel senso delle distribuzioni.

Ora consideriamo: $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x^2-1+i\varepsilon}$. Di nuovo, applichiamo a una funzione test:

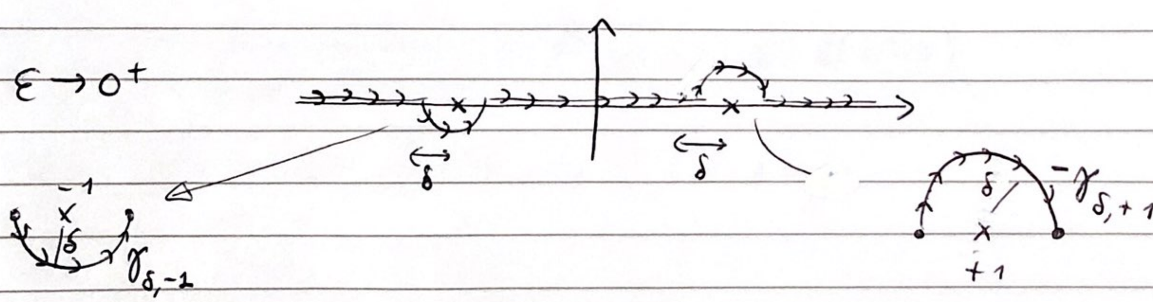
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{x^2-1+i\varepsilon}\varphi(x)$$

$$\frac{1}{x^2-1+i\varepsilon} \to \text{2 poli semplici a } \pm\sqrt{1-i\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\approx} \pm\left(1-\frac{i}{2}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right)$$



Nel limite $\varepsilon\to 0^+$ deformiamo il cammino:

$\varepsilon\to 0^+$



$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x^2-1+i\varepsilon} \varphi(x)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-1-\delta} dx + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} dx + \int_{1+\delta}^{+\infty} dx \right) \frac{1}{x^2-1} \varphi(x)$$

$$+ \int_{\gamma_{\delta,-1}} dx \, \frac{1}{x^2-1} \varphi(x) + \int_{-\gamma_{\delta,+1}} dx \, \frac{1}{x^2-1} \varphi(x)$$

Come prima, per olomorfia questo risultato non dipende da δ, quindi possiamo prendere il limite $\delta \to 0$:

$$= \lim_{\delta\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-1-\delta} dx + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} dx + \int_{1+\delta}^{-\infty} dx \right) \frac{1}{x^2-1} \varphi(x)$$

$$+ \pi i \, \mathrm{Res}_{\frac{1}{x^2-1}\varphi(x)}[-1] - \pi i \, \mathrm{Res}_{\frac{1}{x^2-1}\varphi(x)}[1]$$

$$= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x^2-1} \varphi(x) + \pi i \left(\frac{1}{-2}\varphi(-1) - \frac{1}{2}\varphi(1) \right)$$

$$= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x^2-1} \varphi(x) - \frac{\pi i}{2} \left(\varphi(-1) + \varphi(1) \right)$$

$$= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x^2-1} \varphi(x) - \frac{\pi i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\delta(x+1) + \delta(x-1) \right) \varphi(x)$$

Dunque: $\displaystyle \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x^2-1+i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x^2-1} - \frac{\pi i}{2}\left(\delta(x+1) + \delta(x-1)\right)$

D'altra parte dall'esercizio precedente:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x^2-1+i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x^2-1} - \pi i \, \delta(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad \delta(x^2-1) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1).$$