DIAGONALIZZAZIONE

Problema di trovare un rappresentante "naturale" in ogni classe di similitudine di matrici $n \times n$ di $M(n \times n, K)$.

Quando una classe contiene una matrice diagonale?

Fissiamo un campo K.

__Def__

1) $f : V \to V$ endomorfismo di V

$\lambda \in K$ è un autovalore di f se esiste $v \in V$, $\boxed{v \neq 0}$ tale che $f(v) = \lambda v$: v è detto autovettore di f di autovalore λ.

2) A matrice $n \times n$

$\lambda \in K$ è un autovalore di A se esiste $v \in K^n$, $\boxed{v \neq 0}$ tale che $Av = \lambda v$: si ritrova la definizione precedente per $f = L(A)$.

Gli autovettori sono $\neq 0$, altrimenti la nozione di autovalore sarebbe banale. Infatti per ogni $\lambda \in K$, preso il vettore nullo, si ha $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$.

<u>Oss</u>. λ è autovalore di $f \iff \lambda$ è autovalore di $M_B(f)$, $\forall$ base B di V.

<u>Esempio</u>

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$. Dunque $Av = \lambda v \iff \begin{cases} 2v_1 = \lambda v_1 \\ 0 = \lambda v_2 \end{cases}$

Questo accade con $v \neq 0$ solo se $\lambda = 2$ o $\lambda = 0$.

- 2 è un autovalore, autovettori sono $(1,0)$ e tutti i $(v_1, 0)$ con $v_1 \neq 0$.
- 0 è autovalore, autovettori gli $(0, v_2)$, $v \neq 0$.

cioè lungo la direzione $\langle e_1 \rangle$ A moltiplica per 2, e nella direz. $\langle e_2 \rangle$ A manda tutto a 0.

<u>Def</u>. $f: V \to V$, $\lambda \in K$

$$\mathrm{Aut}(\lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \} = \{0\} \cup \{\text{autovettori di } \lambda\}$$

è detto <u>autospazio</u> di λ.

Oss. $Aut(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V:

- $0 \in Aut(\lambda)$
- $v, w \in Aut(\lambda) \Rightarrow f(v) = \lambda v, \; f(w) = \lambda w$.

  Dunque $f(v+w) \underset{\text{lin.}}{=} f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w =$
  $= \lambda(v+w)$

  $\Rightarrow v + w \in Aut(\lambda)$
- $v \in Aut(\lambda), c \in K$: $f(cv) \underset{\text{lin.}}{=} c f(v) = c(\lambda v) =$
  $= \lambda(cv)$

  $\Rightarrow cv \in Aut(\lambda)$.

Dunque λ è autovalore $\Leftrightarrow$ $Aut(\lambda) \supsetneq \{0\}$: ha dim positiva.

Def. molteplicità geometrica dell'autovalore λ è $m_g(\lambda) = \dim Aut(\lambda)$.

λ autovalore $\Rightarrow m_g(\lambda) \geq 1$.

Oss. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono 2 autovalori di f allora $Aut(\lambda_1) \cap Aut(\lambda_2) = \{0\}$.

Infatti se v è un autovettore sia di λ_1 sia di λ_2 $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0 \;, v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$.

Questa osservazione si generalizza nel seguente modo:

Prop. importante.

Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti: Ossia, se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori di f, $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$, e se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori relativi, si ha che $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

Dim. Induzione su k.

$\boxed{k=1}$: autovett. v_1 è $\neq 0$: lin. indip.

Supp. vera la tesi per $\underset{1}{\overset{\vee}{k-1}}$, dim per k.

(*) Sia $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$ comb. lin. nulla.

Allora $f(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k) = f(0) = 0$

$\overset{\text{lin.}}{=} \mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_k f(v_k)$

$\overset{\text{ip.}}{=} \mu_1(\lambda_1 v_1) + \dots + \mu_k(\lambda_k v_k) = \lambda_1 \mu_1 v_1 + \dots + \lambda_k \mu_k v_k$.

Per usare l'ip. induttiva sostituisco a $\mu_k v_k$ l'espressione $-\mu_1 v_1 - \dots - \mu_{k-1} v_{k-1}$ da (*):

$$\lambda_1\mu_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1}\mu_{k-1}v_{k-1} - \lambda_k(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1}v_{k-1}) = 0$$

$$(\lambda_1\mu_1 - \lambda_k\mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_{k-1}\mu_{k-1} - \lambda_k\mu_{k-1})v_{k-1} = 0.$$

Ma per ip. induttiva $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono lin. indip. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1\mu_1 - \lambda_k\mu_1 = (\lambda_1 - \lambda_k)\mu_1 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mu_{k-1} = 0 \end{cases}$$

Essendo gli autoval. tutti distinti $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0, \dots, \lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{k-1} = 0$. Allora la $(*)$ diventa $\mu_k v_k = 0$, $v_k \neq 0 \Rightarrow \mu_k = 0$. ∎

Da ciò segue che, se f ~~due~~ dim n, o se A è $n \times n$, non può avere più di n autovalori distinti.

Oss. che 0 è autovalore $\Leftrightarrow$ f non è iniettiva, e in tal caso $Aut(0) = \operatorname{Ker} f$.

Nel caso di una matrice $Aut(0) = \operatorname{Ker} L(A)$.

L'autospazio di λ si può anche esprimere come nucleo di un endomorfismo.

Infatti $Aut(\lambda) = Ker(f - \lambda\, id_V)$,

$$f - \lambda\, id_V : V \longrightarrow V$$
$$v \longrightarrow (f - \lambda\, id_V)(v) = f(v) - \lambda\, id_V(v)$$
$$\underset{\text{def. di operaz. in } Hom(V,V)}{\downarrow} = f(v) - \lambda v.$$

Dunque $v \in Aut(\lambda) \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0$
$\Leftrightarrow v \in Ker(f - \lambda\, id_V)$.

Analogamente per le matrici: $v \in Aut(\lambda)$ di una matrice $A \Leftrightarrow v \in Ker(L(A) - \lambda\, id_{K^n}) =$
$= Ker(L(A) - \lambda L(E_n)) = Ker(L(A - \lambda E_n))$.

In altre parole, gli autovettori di λ sono le soluzioni del sistema lineare
$(A - \lambda E_n)(X) = 0$.

Questa interpretazione ci dà un metodo per trovare gli autovalori.

Sia $f : V \to V$ un endom.

λ è autovalore di $f \Leftrightarrow Aut(\lambda) = Ker(f - \lambda\, id_V) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow f - \lambda\, id_V$ non è un isomorfismo
$\Leftrightarrow$ il determinante $\det(f - \lambda\, id_V) \neq 0$.

Se $\mathcal{B}$ è una base di V, $\det(f - \lambda \mathrm{id}_V) =$

$$= \det(M_{\mathcal{B}}(f - \lambda \mathrm{id}_V)) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda M_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)) =$$

$$= \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n).$$ Detta $A = M_{\mathcal{B}}(f)$,

$$\boxed{\lambda \text{ è autovalore di } f \iff \det(A - \lambda E_n) = 0.}$$

Oss. che se A, A' sono matrici simili

$$\det(A - \lambda E_n) = \det(A' - \lambda E_n).$$

Se $A' = SAS^{-1}$, $\det(SAS^{-1} - \lambda E_n) = \det(SAS^{-1} - \lambda S E_n S^{-1}) =$

$$= \det(SAS^{-1} - S(\lambda E_n)S^{-1}) = \det(S(A - \lambda E_n)S^{-1}) =$$

$$= \det(A - \lambda E_n).$$

Sia x un'indeterminata, consideriamo

$$A - xE_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix} = (a_{ij} - x\delta_{ij})_{i,j = 1,\dots,n}$$

$$\det(A - xE_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)} - x\delta_{1\sigma(1)}) \cdots (a_{n\sigma(n)} - x\delta_{n\sigma(n)}) =$$

$$= \underbrace{(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x)}_{\sigma = id} + \text{polinomi in } x \text{ di grado} \leq n-2$$

perchè se $n-1$ fattori sono sulla diagonale lo è anche l'n-esimo

$= (-1)x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})x^{n-1} + \alpha_{n-1}x^{n-2} + \dots$

$+ \dots \alpha_1 x + \det(A)$

termine noto, è $\det(A - 0E_n)$

È un polinomio di grado n in x, a coefficienti in K

<u>Def.</u> $\det(A - xE_n) = \det(f - xE_n)$ è detto polinomio caratteristico di f, e denotato $P_f(x)$.

Questo polinomio dipende solo da f, non dalla base scelta, e dalla relativa matrice $A = M_B(f)$. <u>In</u> particolare, non solo det dipende solo da f, ma tutti i coefficienti e le radici di $P_f(x)$ dipendono solo da f

<u>Il</u> coeff. di $(-1)^{n-1}x^{n-1}$, ossia $a_{11} + \dots + a_{nn}$ è detto <u>traccia di f</u>. È la traccia della matrice A.

$\boxed{\text{gli autovalori di } f \text{ sono le radici del polinomio caratteristico, ossia le soluzioni dell'equazione } P_f(x) = 0.}$

Se si parte da una matrice, il polinomio caratteristico di A è $p_A(x) = \det(A - xE_n)$.

Esempi

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = -x(2-x)$

che ha come radici $x=0$ e $x=2$: sono gli autovalori di A, come già visto.

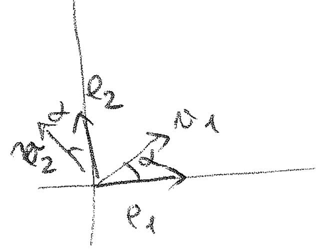
$Aut(2)$: soluzioni del sist. $(A-2E_2)(x) = 0$

$$\cancel{A}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \{(x_1, 0) \mid x_1 \in K\} = \langle e_1 \rangle.$$

2) $V = \mathbb{R}^2$ Consideriamo la matrice

$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, è la matrice della rotazione di angolo α rispetto alla base canonica.



$v_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$v_2(-\sin\alpha, \cos\alpha)$

$$p_{R_\alpha}(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} = (\cos\alpha - x)^2 + \sin^2\alpha =$$

$= x^2 - 2\cos\alpha\, x + 1.$

L'equazione è $x^2 - 2\cos\alpha\, x + 1 = 0$,

$\frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 : \leq 0$. Ci sono 2 casi:

a) $\cos^2\alpha - 1 < 0 \implies p_{R_\alpha}(x)$ non ha radici <u>reali</u>, la rotazione non ha autovettori.

b) $\cos^2\alpha = 1 \implies \cos\alpha = 1$ o $\cos\alpha = -1$

$\alpha = 0$	$\alpha = \pi$
$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
identità	rotazione di π
$p(x) = (x-1)^2$, unico autovalore 1 con molteplicità 2	$p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, unico autoval. -1 con molt. 2

Tutti i vettori sono autovettori.

Se lavoro su $\mathbb{C}$, radici del pol. caratt. sono

$x_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$,

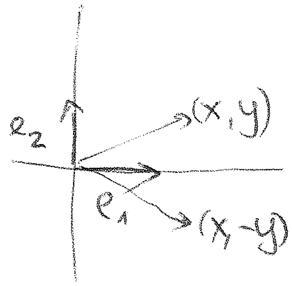
i unità immaginaria; 2 autovalori complessi.

3) <u>Riflessioni</u>.

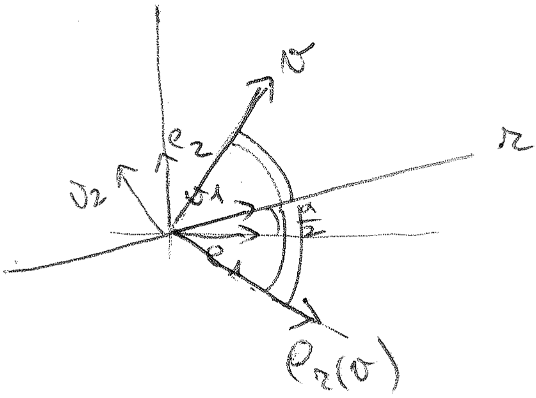
Consideriamo $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ def. da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

riflessione rispetto all'<u>asse x</u>: $\langle e_1 \rangle$: asse della riflessione;



Ora ruoto di $\frac{\alpha}{2}$ l'asse della riflessione, ottengo ρ_r, riflessione di asse r.



Come scrivere equazioni di ρ_r?

Ruotare l'asse di $\frac{\alpha}{2}$

$\updownarrow$

ruotare i vettori di base di $-\frac{\alpha}{2}$, passando da una base (v_1, v_2) con v_1 parallelo e v_2 ortogonale a r, alla base canonica.

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\alpha}{2}) & -\sin(-\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(-\frac{\alpha}{2}) & \cos(-\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Allora
$$M_{\mathcal{C}}(\rho_r) = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)}_{\text{rotaz. di } \frac{\alpha}{2}} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\rho_r) \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)}_{\text{rotaz. di } -\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} =: S_\alpha$$ matrice di ρ_r rispetto a $\mathcal{C}$.

$$P_{S_\alpha}(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - x \end{vmatrix} = (-\cos^2_\alpha + x^2) - \sin^2\alpha =$$

$= x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$: 2 autovalori $1, -1$.
Sono gli stessi della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, simile a S_α.
2 autospazi: la retta r con $\lambda = 1$, la retta ortog. a r con $\lambda = -1$.

<u>Def</u> 1) $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo, $\dim V = n$.

è <u>diagonalizzabile</u> se esiste una base $\mathcal{B}$ formata da autovettori di f: $v_1, \dots, v_n$.
ciò significa $f(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, f(v_n) = \lambda_n v_n \Longrightarrow$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{diagonale}$$

2) A matrice quadrata è diagonalizzabile se lo è $L(A)$, cioè se A è simile a una matrice diagonale: $\exists\, S$ invertibile, D diagonale t.c. $D = SAS^{-1}$.

— · —

Se λ è autovalore, è radice di $P_f(x) \Longrightarrow$ per il teorema di Ruffini $x - \lambda$ divide $P_f(x)$: $P_f(x) = (x-\lambda)\, g(x)$. Ora considero $g(\lambda)$:

se $g(\lambda) \neq 0$ ho finito, altrimenti se $g(\lambda) = 0$, $x-\lambda$ divide $g(x)$, e quindi $p_f(x) = (x-\lambda)^2 h(x)$.
Continuo così fino a trovare un'espressione
$p_f(x) = (x-\lambda)^m g(x)$ con $g(\lambda) \neq 0$: tale m è il massimo esponente con cui $(x-\lambda)$ divide $p_f(x)$. È detto <u>molteplicità algebrica</u> dell'autovalore λ, e denotato $m_a(\lambda)$.

<u>Proposizione</u> $f: V \to V$ endomorfismo, $\dim V = n$. Sia λ un autovalore di f.
Allora $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$.

<u>Dim.</u> Fisso una base $v_1, \dots, v_m$ di $Aut(\lambda)$, dove $m = m_g(\lambda)$. La prolungo a una base B di V: $(v_1 \dots v_n)$. Sia $A = M_B(f)$. Si ha
$f(v_1) = \lambda v_1, \dots, f(v_m) = \lambda v_m \implies$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & & 0 & \\ 0 & \lambda & & \vdots & B \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ \hline 0 & 0 & & 0 & A' \end{array}\right)$$

con B, A' opportune.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(v_1) & f(v_2) \; \cdots & f(v_m) \end{array}$$

$$p_f(x) = |A - xE_n| = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - x \end{matrix} & B \\ \hline 0 & A' - xE_{n-m} \end{array}\right| =$$

$= (\lambda - x)^m \, |A' - x E_{n-m}| = (\lambda - x)^m g(x)$

perché è una matrice a blocchi.

$\Rightarrow m_g(\lambda) = m \leq m_a(\lambda)$ (perché non so se $g(\lambda) = 0$ oppure $g(\lambda) \neq 0$).

<u>Esempio</u>

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^2$

unico autovalore è $\lambda = 0$ con $m_a(0) = 2$.

$Aut(0) = \{(x_1, x_2) \mid Ax = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\} =$

$= \langle e_1 \rangle$: ha dim 1 $\;:\;$ $m_g(0) < m_a(0)$.

A non è diagonalizzabile, altrim. sarebbe simile a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ perché 0 è l'unico autovalore, ma nella classe di similitudine di $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'è solo lei.

2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = S_\alpha$ $\qquad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -1$

$m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = 1$; $m_g(\lambda_i)$ non può essere < 1, dunque $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ per $i = 1, 2$.

<u>Oss.</u> Se f ha n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow p_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$

$= (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$.

Necessariamente $m_a(\lambda_i) = 1 = m_g(\lambda_i) \Rightarrow f$ è diagonalizzabile, perché autovettori $v_1, \dots, v_n$ relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono linearmente indip., c'è una base di autovettori. A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Per es. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Su $\mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

con $\lambda_1 = \underset{\overset{\shortparallel}{e^{i\alpha}}}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$, $\lambda_2 = \underset{\overset{\shortparallel}{e^{-i\alpha}}}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$

<u>Oss.</u> Se $p_A(\lambda) = (x-\lambda)^n$, $m_a(\lambda) = n$.
Allora A è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ c'è una base di autovettori di autovalore λ, la matrice è simile a λE_n e $Aut(\lambda) = V$, ossia $m_g(\lambda) = n$. In questo caso $f = \lambda\, id_V$: $f(v) = \lambda v \ \ \forall v \in V$. Un tale endomorfismo è chiamato <u>omotetia</u>.

Teorema $f: V \to V$ endomorfismo

$\dim V = n$.

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1) f è diagonalizzabile;

2) il polinomio caratteristico $P_f(x)$ è prodotto di n fattori lineari non necessariamente distinti

$P_f(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$, e per ogni autovalore λ_i si ha $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$;

3) Detti $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ gli autovalori distinti di f, si ha $V = Aut(\mu_1) \oplus Aut(\mu_2) \oplus \cdots \oplus Aut(\mu_k)$.

Dim.

1) $\Rightarrow$ 2) f diagon. $\Rightarrow \exists\, B$ base di autovett. e $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale. Allora $P_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$.

Consid. $m_a(\lambda_i)$: è il numero di volte che λ_i compare sulla diagonale, cioè nella base B $m_a(\lambda_i)$ vettori hanno λ_i come autovalore. Allora $\dim Aut(\lambda_i) =$

$= m_g(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i E_n) = m_a(\lambda_i)$

2) $\Rightarrow$ 3) $P_f(x) = (\mu_1 - x)^{r_1}(\mu_2 - x)^{r_2} \cdots (\mu_k - x)^{r_k}$ con $r_1 + \cdots + r_k = n$.

Per ip. $r_i = m_a(\mu_i) = m_g(\mu_i) = \dim Aut(\mu_i)$.

Allora

$\dim Aut(\mu_1) + \dots + \dim Aut(\mu_k) = n = \dim V$

Inoltre, siccome ~~s~~ autovettori relativi ad autovalori distinti sono lin. indip., la somma $Aut(\mu_1) + \dots + Aut(\mu_k)$ è diretta, ossia se un vettore v si scrive come somma $v = w_1 + \dots + w_k$, con $w_i \in Aut(\mu_i)$ questa espressione è unica; infatti:

se $v = w_1 + \dots + w_k = w_1' + \dots + w_k'$, allora

$$\underbrace{(w_1 - w_1')}_{\in Aut(\mu_1)} + \dots + \underbrace{(w_k - w_k')}_{\in Aut(\mu_k)} = 0 \Rightarrow$$ sono lin. indip. ~~~~ oppure tutti nulli.

Allora $Aut(\mu_1) \oplus \dots \oplus Aut(\mu_k)$ ha dim n $\Rightarrow$ è uguale a V.

3) $\Rightarrow$ 1) $V = Aut(\mu_1) \oplus \dots \oplus Aut(\mu_k)$: costruisco una base di V unendo basi dei vari autospazi, e ottengo una base di autovettori.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

è diagonalizzabile?

$$p_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 \\ -3 & -2-x & 3 \\ -2 & -2 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$= x(2+x)(3-x)+6+6-2(x+2)-6x-3(3-x)=$

$= -x^3+x^2+\cancel{6x}+12-2x-4-\cancel{6x}-9+3x=$

$= -x^3+x^2+x-1 = -x^2(x-1)+(x-1)=$

$=(1-x^2)(x-1)=(1-x)(1+x)(x-1)=$

$= -(1-x)^2(x+1)$: si fattorizza in fattori lineari

gli autovett sono

$\lambda_1 = 1$ con $m_a(1)=2$: $m_g(1)$?

$\lambda_2=-1$ con $m_a(-1)=1 \Rightarrow m_g(-1)=1$

$$Aut(1) = Ker((A-E_3)) = Ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rg 1 $\Rightarrow$ il nucleo ha dim 2

$\Rightarrow m_g(1)=2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

Base di autovettori:

$Aut(1)$: $x_1+x_2-x_3=0$

$x_1=-x_2+x_3$

$(-x_2+x_3, x_2, x_3) = x_2(-1,1,0)+x_3(1,0,1)$

$Aut(1) = \langle(-1,1,0),(1,0,1)\rangle$

$$Aut(-1) = Ker(A+E_3) = Ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$+2x_2=3x_3 \quad x_2=\frac{3}{2}x_3 \quad x_1 = x_2-x_3 = \frac{3}{2}x_3-x_3=\frac{1}{2}x_3$

$(\frac{1}{2}x_3, \frac{3}{2}x_3, x_3) \quad Aut(-1)=\langle(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)\rangle =$

$\langle(1,3,2)\rangle$

$$B = \left((1,0,1), (-1,1,0), (1,3,2) \right)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1} A S$$

$$\overset{\shortparallel}{M_B(L(A))} = \underset{S^{-1}}{M^{B}_{\mathcal{B}}(id)} \, \underset{A}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L(A))} \, \underset{S}{M^{B}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det S = 2 - 3 - 1 = -2$.

Faccio per la verifica. $A' = S^{-1} A S$ ossia
$SA' = AS$

$$SA' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema fondamentale dell'algebra.

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

con $a_n \neq 0$, $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Allora $p(x)$ ha almeno una radice λ in $\mathbb{C}$. Dunque $p(x)$ è divisibile per $x - \lambda$:

$p(x) = (x-\lambda)\, p_1(x)$, con $p_1(x)$ di grado $n-1$;

allora si ripete e si ottiene che $p(x)$ è prodotto di n fattori lineari.

Per trovare $p_1(x)$ si esegue la divisione di polinomi.

<u>Attenzione!</u> formula risolutiva per radicali solo per grado $n \leq 4$.

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2+1 =$$

$$= (x+i)(x-i)$$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$; è simile a $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; non lo è su $\mathbb{R}$.

$$Aut(i) = Ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 + i x_2 = 0$$

$$(-i x_2, x_2) = x_2(-i, 1)$$

$$Aut(i) = \langle (i, -1) \rangle$$

$$Aut(-i) = Ker \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cancel{+i} - i x_2 = 0 \qquad (i x_2, x_2) = x_2(i, 1)$$

$$\mathcal{B} = ((i, -1), (i, 1))$$

$$A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1} A S, \quad \text{con } S = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det S = 2i \qquad S^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} i \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2i} = a + bi \qquad 2ai + 2bi^2 = 1 \qquad 2ai - 2b - 1 = 0$$

$$= -\frac{1}{2} i \qquad 2ai - 2b = 1 \qquad b = -\frac{1}{2} \quad a = 0$$