Esercizi su Forme bilineari e Teorema Spettrale
Ingegneria Industriale e Navale 2019/2020 - dodicesimo foglio

December 9, 2019

1. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la seguenta forma bilineare:
$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3.$$
Si dica se g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$; si scriva la matrice $M_{\mathcal{E}}(g)$ che rappresenta g in tale base.

2. In $\mathbb{R}^2$ si consideri la seguenta forma bilineare:
$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$
Si dica se g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

3. Sia
$$Y := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3.$$
Si determini il sottospazio ortogonale $Y^\perp$ a Y rispetto al prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$ e una base ortogonale di $Y^\perp$.

4. Sia $W \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici simmetriche. Si trovi una base ortonormale di W.

5. Si determini il sottospazio ortogonale $W^\perp$ a W, cioè il sottospazio
$$W^\perp := \{C \in V \mid g(C, A) = 0 \ \forall A \in W\}.$$

6. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale
$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

7. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 su $\mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione bilineare

$$g : V \times V \to \mathbb{R}, \quad g(A, B) = \mathrm{Tr}(A \cdot {}^tB),$$

dove la TRACCIA $\mathrm{Tr}(C)$ di una matrice quadrata $C = (c_{ij})$ è definita da

$$\mathrm{Tr}(C) = c_{11} + c_{22}.$$

- Si dimostri che g è un prodotto scalare su V.
- Si determini una base ortonormale di V rispetto a g.
- Per le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

  si calcoli

$$g(A, B), \quad \|A\|, \quad \|B\|.$$

8. Per ognuna delle seguente matrici A, si determini una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tale che $B^{-1} \cdot A \cdot B = D$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Si consideri una riflessione piana $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla retta vettoriale di equazione

$$\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y = 0,$$

data dalla

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che f é digonalizzabile per ogni α. Si trovino i suoi autovalori ed i suoi autospazi, e se ne dia una interpretazione geometrica.

10. Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si dimostri che l'operatore $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L_A(v) = A \cdot v$ è un operatore simmetrico.
- Si determinino una matrice ortogonale P ed una matrice diagonale D, tali che $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.