

### Testo esercizio

Un canale infinitamente lungo e di sezione rettangolare larga, è presidiato a monte da una paratoia sollevata a battente larga quanto il canale. Alla distanza  $L$  (relativamente modesta) a valle della paratoia c'è un gradino di fondo alto  $s = 0.1 m$ . La portata fluente, per unità di larghezza, vale  $q = 0.8 m^3/sm$  e la pendenza risulta essere  $i = 0.002$ . Si assuma inoltre, un coefficiente di contrazione costante pari a  $C_c = 0.6$  e il coefficiente di Strickler  $c = 50 m^{1/3}/s$ . Si ricostruiscano i diversi possibili profili di moto permanente lungo il canale al variare dell'apertura  $a$  della paratoia.

N.B. Si trascurino le dissipazioni di energia localizzate in corrispondenza del gradino.

### Soluzione

Per prima cosa con i dati del problema possiamo calcolare l'altezza di moto uniforme e l'altezza critica:

$$h_0 = 0.540 m \quad k = 0.403 m$$

Risulta  $k < h_0$  dunque il canale è caratterizzato da una pendenza del fondo inferiore a quella critica.

Nel caso di una paratoia in corrispondenza di una corrente a debole pendenza si ha un risalto, a valle della paratoia. Consideriamo le diverse possibili posizioni "chiave" del risalto a valle della paratoia:

- 1) il risalto avviene in sezione 2
- 2) il risalto avviene in sezione 1
- 3) il risalto avviene subito a valle della paratoia

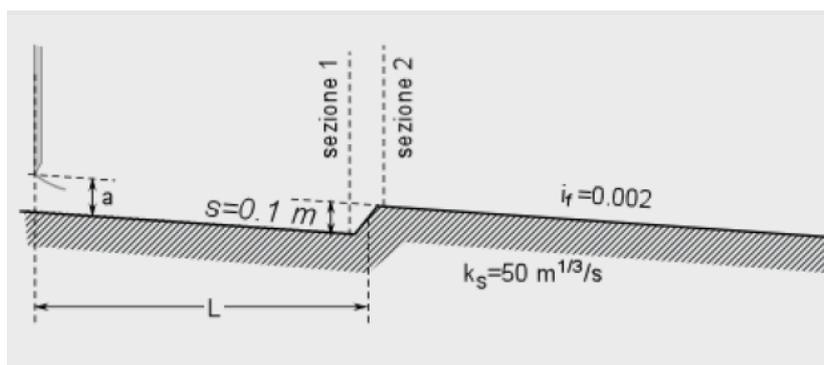


Figure 1

Le altre possibili configurazioni sono intermedie rispetto a quelle appena elencate: il risalto avviene tra la paratoia e la sezione 1, il risalto avviene a valle della sezione 2, il risalto non avviene.

1) Consideriamo il caso in cui il risalto si forma immediatamente a valle del gradino, dunque in sezione 2, Figura 2. In queste condizioni l'altezza  $h_2$  di

corrente rapida in corrispondenza della sezione 2 coincide con la coniugata dell'altezza di moto uniforme della corrente lenta di valle, cioè  $h_2 = \bar{h}_0$ . Essendo il numero di Froude  $F_0 = 0.644$ , si ottiene  $h_2 = 0.291 m$  a cui corrisponde l'energia  $E_2 = 0.676 m$ . Dal bilancio tra le sezioni 1 e 2, nell'ipotesi di trascurare qualsiasi dissipazione di energia, risulta  $E_1 = E_2 + 0.1$ , dunque  $E_1 = 0.776 m$ . A cui corrisponde, sul ramo delle correnti rapide, il livello  $h_1 = 0.249 m$ . Chiamiamo  $a_1$  l'apertura che produce il risalto in sezione 2, che quindi produce in corrispondenza della sezione 1, l'altezza  $h_1 = 0.249 m$ .

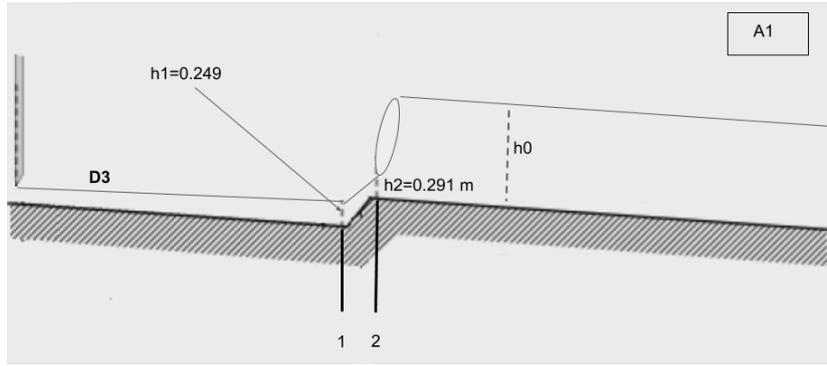


Figure 2: Profilo nel caso in cui il risalto avviene in sezione 2. Caso (1),  $a = a_1$ .

2) Consideriamo il caso in cui il risalto si forma immediatamente a monte del gradino, dunque in sezione 1, Figura 3. La sezione 2 avrà moto uniforme proveniente da valle, dunque  $h_2 = h_0 = 0.540 m$  e l'energia specifica  $E_2 = E_0 = 0.652 m$ . Dal bilancio tra le sezioni 1 e 2, nell'ipotesi di trascurare qualsiasi dissipazione di energia, si trova  $E_1 = E_2 + 0.1 = 0.752 m$  a cui corrisponde, sul ramo delle correnti lente, il livello  $h_1 = 0.682 m$ . Calcolando l'altezza coniugata di  $h_1$ , si trova l'altezza a monte del risalto:  $\bar{h}_1 = 0.214 m$ . Chiamiamo  $a_2$  l'apertura che produce il risalto in sezione 1, che quindi produce in corrispondenza della sezione 1 (subito a monte di essa, cioè a monte del risalto che avviene in sezione 1), l'altezza  $\bar{h}_1 = 0.214 m$ .

Questa altezza di corrente rapida (chiamata  $h1'$  in Figura 3 al termine del profilo D3, appena a monte del risalto) risulta inferiore a quella ( $h_1 = 0.249 m$ ) individuata precedentemente, cioè corrisponde ad un'apertura della paratoia  $a_2$ , inferiore ad  $a_1$ . Discuteremo in seguito questo aspetto.

3) Consideriamo l'ultimo caso, in cui il risalto si forma immediatamente a valle della paratoia, Figura 4. In queste condizioni, indicata con  $h_{D1}$  l'altezza della corrente lenta nella sezione subito a valle del risalto (dipende dal profilo D1 che si sviluppa per una lunghezza  $L$ ), e indicata con  $h_v = a_3 C_c$  l'altezza della corrente nella sezione di vena contratta, l'apertura della paratoia dovrà essere tale che  $h_v = \bar{h}_{D1}$ , cioè  $a_3 = \bar{h}_{D1}/C_c$ .

Per quanto riguarda i profili intermedi, consideriamo i casi in cui il risalto avvenga tra la paratoia e la sezione 1. Partiamo dal caso (2), risalto in sezione 1. A mano a mano che il profilo D1 si protrae verso la paratoia, ovvero il risalto si sposta verso monte, l'altezza subito a valle del risalto (che abbiamo chiamato  $h_{D1}$  in Figura 4) si abbassa. E di conseguenza aumenta la sua coniugata.

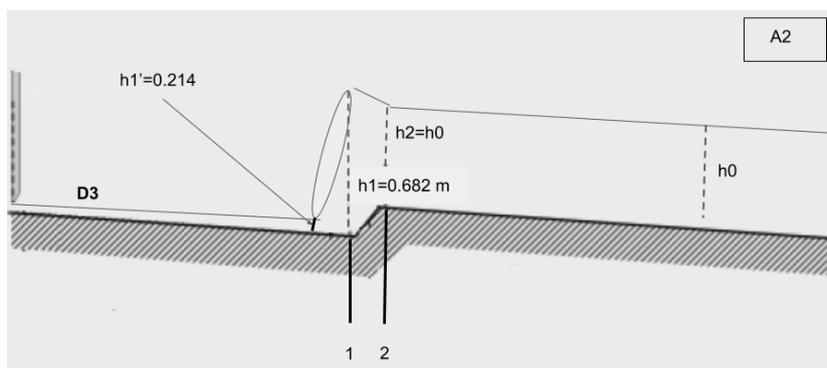


Figure 3: Profilo nel caso in cui il risalto avviene in sezione 1. Caso (2),  $a = a_2$ .

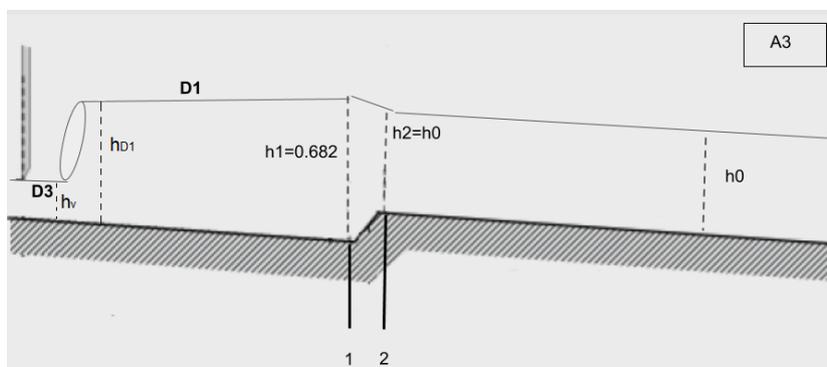


Figure 4: Profilo nel caso in cui il risalto avviene immediatamente a valle della paratoia. Caso (3),  $a = a_3$ .

Questo può avvenire se c'è un aumento dell'apertura della paratoia  $a$ , fino ad  $a = a_3$ .

Detto diversamente, nel tratto paratoia - sezione 1, a partire dal profilo con  $a = a_3$  se si riduce l'apertura  $a < a_3$  cresce la spinta della corrente rapida di monte e il risalto si sposta verso valle. Ora, via via che si riduce l'apertura si raggiunge la condizione limite  $a = a_2$  per la quale il risalto si forma immediatamente a monte del gradino (Figura 3). A partire da questa condizione, una riduzione ulteriore infinitesima dell'apertura della paratoia fa sì che, la corrente lenta a valle del risalto sia caratterizzata da una spinta insufficiente. Questo perché la corrente lenta, passando dalla sezione 1 alla sezione 2, perde spinta, dal momento che si riduce l'altezza  $h$ . Quello che succede per  $a < a_2$  è che la corrente rapida sale sul gradino spostando il risalto sensibilmente verso valle, nel punto in cui il profilo D3 assume  $h = \bar{h}_0$ , come in Figura 5.

Per mantenere il risalto subito a valle del gradino, caso (1), è sufficiente una corrente rapida sensibilmente più debole e quindi un'apertura della paratoia maggiore ( $a_1 > a_2$ ). Accade così che la configurazione di Figura 2 viene in qualche modo saltata, se partiamo dal caso  $a = a_3$  e man mano riduciamo l'apertura  $a$ .

Partendo invece da condizioni analoghe a quelle illustrate in Figura 5 e incre-

mentando gradualmente l'apertura della paratoia (e quindi riducendo l'energia e la spinta della corrente rapida), il risalto si sposta con continuità verso monte fino a raggiungere, per  $a = a_1$ , la configurazione illustrata in Figura 2. Un ulteriore, aumento infinitesimo dell'apertura fa sì che la corrente lenta spinga il risalto a monte del gradino.

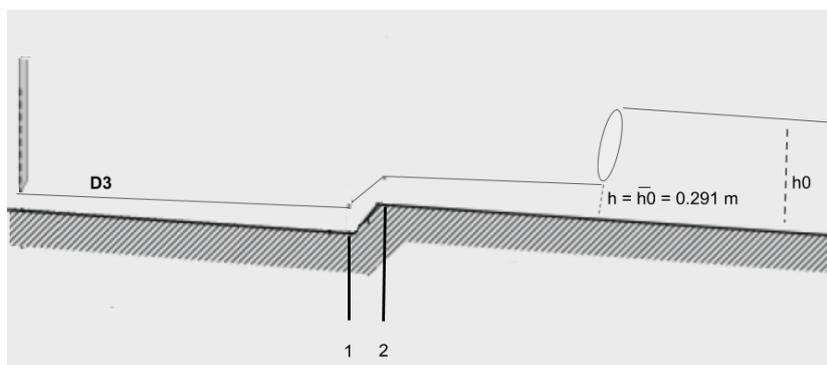


Figure 5: Profilo nel caso in cui il risalto avviene a valle della sezione 2. Caso in cui  $a < a_2$ .

Dunque, per riassumere: considerando una paratoia posizionata su un canale a debole pendenza, in assenza di gradini, se si riduce l'apertura della paratoia, aumenta la spinta della corrente rapida e dunque il risalto si sposta verso valle. In questo caso si ha infatti una spinta costante a valle del risalto, data dal moto uniforme a corrente lenta. Invece, la presenza di un gradino causa una perdita di potenza della spinta della corrente lenta nel passaggio da sezione 1 a sezione 2. Di fatto, la spinta della corrente lenta assume il valore massimo (visto l'eventuale profilo D1 con pendenza  $h' > 0$ ), proprio in corrispondenza della sezione 1.