# Lezione 3 dicembre

mercoledì 11 dicembre 2019 14:23

Def. Sia $A$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale $V$.
Se $V$ è uno spazio euclideo, cioè $V$ è munito di un prodotto scalare $g$, allora $A$ si dice SPAZIO AFFINE EUCLIDEO.

Nel caso di $A = A^n_{\mathbb{R}}$, e $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare standard $\cdot$, $A^n_{\mathbb{R}}$ si indica anche con $E^n_{\mathbb{R}}$.

Def. Un RIFERIMENTO CARTESIANO in uno spazio affine euclideo è il dato di un punto $O \in A$ (ORIGINE) e una BASE ORTONORMALE di $V$: $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Consideriamo d'ora in poi $E^n_{\mathbb{R}}$. In questo spazio possiamo definire una DISTANZA tra 2 punti:

Se $P, Q \in E^n_{\mathbb{R}}$: $d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$ DISTANZA TRA P e Q

Se fissiamo un riferimento cartesiano (ad esempio $O$ e la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$), possiamo esprimere la distanza in coordinate:

se $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2} = d(P,Q)$

PROPRIETÀ DELLA DISTANZA:

① $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P,Q$, e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$.

② $d(P,Q) = d(Q,P)$

③ $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \quad \forall P,Q,R$

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE

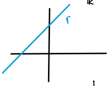
* * *

## ANGOLI TRA RETTE E PIANI

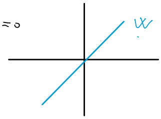
Prima di introdurre gli angoli tra rette e piani, vediamo le seguenti osservazioni.

OSS. Cons. una retta $r \subseteq E^2_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana

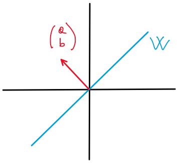
$ax+by=c$



Ricordiamo che la sua giacitura $W$ ha equazione $ax+by=0$

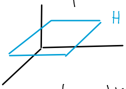


Osserviamo che il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è ortogonale ad ogni vettore di $W$;
infatti : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in W \iff ax_1+by_1=0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0.$



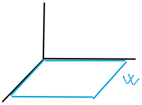
Analogamente, se $H \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ è un piano di equazione cartesiana

$ax+by+cz=d$



ricordo che l'equazione della sua giacitura $W$ è:

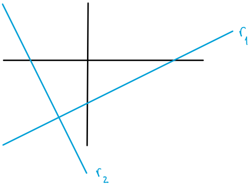
$ax+by+cz=0$



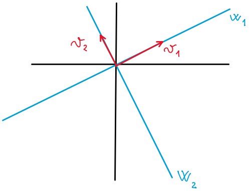
Allora il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è ortogonale a ogni vettore di $W$;
infatti: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W \iff ax_1+by_1+cz_1=0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$

Def.: • Due rette $r_1 \subseteq E^2_{\mathbb{R}}$ e $r_2 \subseteq E^2_{\mathbb{R}}$ con giacitura $W_1 = \mathrm{Span}(v_1)$ e $W_2 = \mathrm{Span}(v_2)$

sono ORTOGONALI : $r_1 \perp r_2 \iff v_1 \perp v_2 \iff v_1 \cdot v_2 = 0$



$\iff$



oss: Se $r_1$ e $r_2$ sono date da equazioni cartesiane $a_1x+b_1y=c_1$ e $a_2x+b_2y=c_2$

Allora:

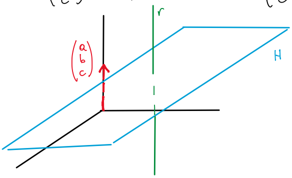
$$r_1 \perp r_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{a_1a_2+b_1b_2=0}$$

Def.: Due piani $H_1 \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ e $H_2 \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ e $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

sono ORTOGONALI $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0}$

Def.: Un piano $H \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ con equazione cartesiana $ax+by+cz=d$ e una retta $r \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ con giacitura $W=\text{Span}(v)$ sono ORTOGONALI

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in \text{Span}(v) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ e $v$ sono linearmente dipendenti



Def. Due rette $r_1 \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ e $r_2 \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ di giaciture $W_1=\text{Span}(v_1)$ e $W_2=\text{Span}(v_2)$

sono ORTOGONALI $\Longleftrightarrow v_1 \perp v_2 \Longleftrightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$

Vediamo ora come definire gli ANGOLI:

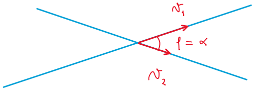
Def.: Siano $r_1$ e $r_2$ due rette in $E^2_{\mathbb{R}}$ oppure $E^3_{\mathbb{R}}$, con giaciture

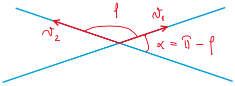
$W_1=\text{Span}(v_1)$ e $W_2=\text{Span}(v_2)$ ($r_1$ e $r_2$ non necessariamente incidenti)

Sia $\varphi := \arccos \dfrac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$

L'ANGOLO (ACUTO) $\alpha$ tra $r_1$ e $r_2$ è:

$$\alpha = \begin{cases} \varphi & \text{se } 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \pi - \varphi & \text{se } \pi/2 < \varphi \le \pi \end{cases}$$



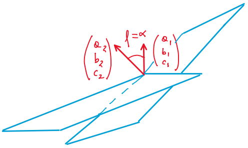


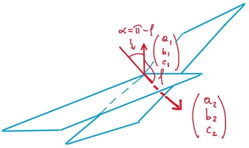
**Def.:** Dati due piani $H_1 \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ con equazione cartesiana $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ e $H_2 \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ di equazione $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$, sia

$$\rho = \arccos \frac{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\|}$$

Allora l'ANGOLO (ACUTO) $\alpha$ tra $H_1$ e $H_2$ è dato da:

$$\alpha = \begin{cases} \rho & \text{se } 0 \le \rho \le \pi/2 \\ \pi - \rho & \text{se } \pi/2 < \rho \le \pi \end{cases}$$

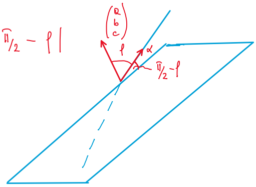
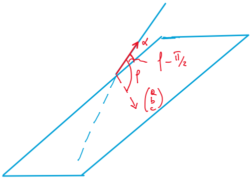

$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$
$\rho = \alpha$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$


$\alpha = \pi - \rho$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$
$\rho$
$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

**Def.** Sia $H \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ un piano di equazione cartesiana $ax+by+cz=d$, e sia $r \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ una retta con giacitura $W = \mathrm{Span}(v)$.

Sia $$\rho := \arccos \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot v}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| \cdot \| v \|}$$

L'ANGOLO (ACUTO) $\alpha$ tra $H$ e $r$ è:

$$\alpha = \left| \pi/2 - \rho \right|$$