Esercizi di Algebra

Esercizio 1 Su $\mathbb{R}^3$ consideriamo le seguenti operazioni:

- $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$
- $(a, b, c) \cdot (d, e, f) = (ad, ae + bf, cf)$

per ogni (a, b, c),$(d, e, f) \in \mathbb{R}^3$.

1. Verificare che $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é un anello con unitá ma non é commutativo
2. Sia
$$I = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | \quad b = 0\}$$
Dimostrare che I é un sottoanello di $\mathbb{R}^3$. É un ideale?

Esercizio 2 Sia $X \neq \emptyset$. Consideriamo

$$\mathbb{R}^X = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \text{f applicazione}\}$$

Su $\mathbb{R}^X$ definiamo le seguenti operazioni:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad \forall f, g \in \mathbb{R}^X$
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \qquad \forall f, g \in \mathbb{R}^X$

1. Verificare che $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ é un anello.
2. L'anello é commutativo? É unitario?
3. Fissato $x_0 \in X$, definiamo
$$I_0 = \{f \in \mathbb{R}^X | f(x_0) = 0\}$$
Dimostrare che I_0 é un ideale massimale di $\mathbb{R}^X$.

Esercizio 3 Sia

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

con le seguenti operazioni: dati $z = a + bi$, $z' = c + di \in \mathbb{Z}[i]$

- $z + z' = (a + c) + (b + d)i$
- $z \cdot z' = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Verificare che $\mathbb{Z}[i]$ é un anello. É commutativo? É unitario?

Esercizio 4 Sia K campo, consideriamo

$$M_n(K) = \{A \quad |\text{A matrice quadrata nxn}, a_{ij} \in K\}$$

Verificare che $(M_n(K), +, \cdot)$ é un anello, dove $\cdot$ indica il prodotto tra matrici.
É unitario? É commutativo?