Esercizi per casa:

1) (i) Partendo dal sistema ortonormale completo dei coseni su $[0, \ell]$: $\left\{\frac{1}{\sqrt{\ell}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\}_{n \geq 1}$ mostra che il seguente è un sistema ortonormale completo su $[-L, L]$:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)\right\}_{k \geq 1}$$

(ii) mostra che $\frac{d^2}{dx^2}$ è un operatore hermitiano sul dominio $D_0 \subset L^2([-L, L])$ di funzioni che soddisfano:

$$f'(\pm L) = 0$$

(iii) usa i punti precedenti per scrivere la soluzione all'equazione: $\frac{d^2 f}{dx^2} = F$

con condizione agli estremi $f'(\pm L)=0$.
Che condizione si deve imporre su F affinché ci sia soluzione?

2) (da 1.43 di Cicogna)

$\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ sistema ortonormale completo su H Hilbert

$$T(e^{(n)}) = e^{(2n)}$$

$$S(e^{(n)}) = \begin{cases} e^{(n/2)} & \text{per } n \text{ pari} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

(i) Mostra che S e T sono continui e calcola $\|S\|$ e $\|T\|$

(ii) Mostra che $S = T^{\dagger}$

(iii) Mostra che $\forall v, w \in H$, $(Tv, Tw) = (v, w)$.
T è un operatore unitario?

(iv) Mostra che T non ha autovettori mentre S ne ha ∞.