(i)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M \quad M^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

$$M^\dagger = M \Rightarrow \begin{cases} a^* = a \\ d^* = d \\ b^* = c \end{cases} \Rightarrow a, d \in \mathbb{R} \quad , b = x_1 - i x_2, \quad c = x_1 + i x_2$$

Possiamo sempre scrivere a, d in termini di $x_0, x_3 \in \mathbb{R}$ come:

$$a = x_0 + x_3, \quad d = x_0 - x_3 \quad \text{ovvero: } x_0 = \frac{a+d}{2}, \quad x_3 = \frac{a-d}{2}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_0 \mathbb{I} + x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \quad \checkmark.$$

(ii) Per essere diagonalizzabile simultaneamente deve valere:

$$[\sigma_2 - \sigma_3, M] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\sigma_2, M] = [\sigma_3, M]$$

$$[\sigma_2, M] = x_1 [\sigma_2, \sigma_1] + x_3 [\sigma_2, \sigma_3]$$

$$= -2i x_1 \sigma_3 + 2i x_3 \sigma_1$$

$$[\sigma_3, M] = x_1 [\sigma_3, \sigma_1] + x_2 [\sigma_3, \sigma_2]$$

$$= 2i x_1 \sigma_2 - 2i x_2 \sigma_1$$

$$\Rightarrow -2i x_1 \sigma_3 + 2i x_3 \sigma_1 = 2i x_2 \sigma_2 - 2i x_2 \sigma_1$$

$$(x_3 + x_2)\sigma_1 - x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_3 = 0$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono lineamente indipendenti $\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_2 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow M = x_0 \mathbb{I} + x_2 (\sigma_2 - \sigma_3).$$

$\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ sistema ortonormale completo

$$f^{(n)} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{(k)} - b_{n+1} e^{(n+1)} \right) \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_{n+1}|^2}}$$

(i) Troviamo $\{b_n\}_{n\geq 2}$ in modo che $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ sia sistema ortonormale:

$$0 = (f^{(m)}, f^{(n)}) \qquad m < n$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} a_k e^{(k)} - b_{m+1} e^{(m+1)}, \sum_{k=1}^{n} a_k e^{(k)} - b_{n+1} e^{(n+1)} \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_k e^{(k)} - b_{m+1} e^{(m+1)}, \sum_{k=1}^{m} a_k e^{(k)} + a_{m+1} e^{(m+1)} + \sum_{k=m+2}^{n} a_k e^{(k)} - b_{n+1} e^{(n+1)} \right)$$

questa parte non dà contributo perchè sono tutti vettori ortogonali a $\{e^{(1)}, \dots, e^{(m+1)}\}$

$$= \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2 - (b_{m+1})^* a_{m+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}^*} \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2}, \quad \forall m \geq 1$$

(ii) $\{a_n\}_{n\geq 1} \notin \ell^2 \Longrightarrow \{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ è completo (con b_n come sopra)

Per mostrare che è completo, mostriamo che:

$$(f^{(n)}, v) = 0, \ \forall n \geq 1 \Longrightarrow v = 0$$

Dato v con $(f^{(n)}, v) = 0$, $\forall n \geq 1$, espandiamo v nel vecchio sistema:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$$

Mostriamo per induzione su n che $(f^{(n)}, v) = 0$ implica:

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_1} \alpha_1$$

• $n = 1$: $\quad 0 = (f^{(1)}, v) \Rightarrow 0 = \left(a_1 e^{(1)} - b_2 e^{(2)}, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{(m)} \right)$

$$= a_1^* \alpha_1 - b_2^* \alpha_2 \implies \alpha_2 = \frac{a_1^*}{b_2^*} \alpha_1$$

Ma dal punto precedente: $b_2 = \frac{1}{a_2^*} |a_1|^2 \Rightarrow b_2^* = \frac{1}{a_2} |a_1|^2$

$$\implies \frac{a_1^*}{b_2^*} = \frac{a_2 a_1^*}{|a_1|^2} = \frac{a_2}{a_1} \implies \alpha_2 = \frac{a_2}{a_1} \alpha_1 \checkmark$$

• $n \Rightarrow n+1$: $\quad 0 = (f^{(n)}, v) \implies 0 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{(k)} - b_{n+1} e^{(n+1)}, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{(m)} \right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^* \alpha_k - b_{n+1}^* \alpha_{n+1}$$

per ipotesi induttive $\alpha_k = \frac{a_k}{a_1} \alpha_1$, $\forall k \leq n$

$$\implies 0 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \frac{1}{a_1} \alpha_1 - b_{n+1}^* \alpha_{n+1}$$

$$\implies \alpha_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}{b_{n+1}^*} \frac{\alpha_1}{a_1} \underset{\text{usando formula per } b_{n+1}}{=} \frac{a_{n+1}}{a_1} \alpha_1 \checkmark$$

Dunque abbiamo mostrato: $\alpha_n = \frac{a_n}{a_1} \alpha_1$, $\forall n \geq 1$.

Ma $\alpha_n \in \ell^2$ mentre $a_n \notin \ell^2$. Questo è possibile solo se il coefficiente di proporzionalità è 0

$$\implies \alpha_1 = 0 \implies \alpha_n = 0, \forall n \geq 1 \implies (e^{(n)}, v) = 0, \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow$ dato che $e^{(n)}$ è completo, $v=0$

$\Rightarrow \{f^{(m)}\}_{m\geq 1}$ è completo

Ora mostriamo: $\{f^{(m)}\}_{m\geq 1}$ è completo $\Rightarrow \{a_n\}_{n\geq 1} \notin \ell^2$

Equivalentemente, mostriamo: $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \ell^2 \Rightarrow \{f^{(m)}\}_{m\geq 1}$ non è completo

Infatti, se $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \ell^2$, allora possiamo definire $v \in H$ come: $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(n)}$ (la somma converge perché $a_n \in \ell^2$)

$$(f^{(m)}, v) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k e^{(k)} - b_{m+1} e^{(m+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(n)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2 - b_{m+1}^* a_{m+1} = 0$$

$\Rightarrow$ abbiamo $v \neq 0$ con $(f^{(m)}, v) = 0 \ \forall m \geq 1$

$\Rightarrow \{f^{(m)}\}_{m\geq 1}$ <u>non</u> è completo.

[<u>Nota</u>: nel corso dello svolgimento abbiamo utilizzato $a_1 \neq 0$ (che per via delle relazioni di ortogonalità $b_{m+1}^* a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2$ implica che $a_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$).
Questa ipotesi va aggiunta, altrimenti un'altra soluzione all'ortonormalità è:

$$a_n = 0 \quad 1 \leq n \leq N, \quad N \in \mathbb{N} \text{ generico}$$
$$b_n = 1 \quad 2 \leq n \leq N$$
$$a_{N+1} \neq 0, \quad b_{N+1} = 0$$
$$b_{m+1}^* a_{m+1} = \sum_{k=N+1}^{m} |a_k|^2, \quad \forall m \geq N+1$$

$$\Rightarrow b_{m+1}, a_{m+1} \neq 0, \ \forall m \geq N+1$$

e in questo caso il sistema non può essere completo].