Università degli Studi di Trieste

Corso di Laurea Magistrale in
INGEGNERIA CLINICA

ANALISI TEMPO FREQUENZA E ANALISI SPETTRALE DI ORDINE SUPERIORE

Corso di Complementi di Analisi di Segnali Biomedici

Modulo NEUROSEGNALI

Docente Sara Renata Francesca MARCEGLIA

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

ANALISI TEMPO-FREQUENZA

- L’analisi spettrale decompone il segnale in oscillazioni invarianti nel tempo
- Non dà informazione sulla localizzazione nel tempo delle diverse oscillazioni in cui il segnale è decomposto

La SHORT TIME FOURIER TRANSFORM (STFT) introduce una dipendenza temporale della decomposizione in oscillazioni applicando la FT non al segnale intero ma solo ad un intervallo temporale

LA STFT

$$\text{STFT}\,(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Dipende dal tempo t e dalla frequenza f

Per ogni t e per ogni f, si opera la FT del segnale x(τ) visto attraverso la finestra w(τ-t), centrata in t

- La STFT è un operatore lineare →
  - Invarianza per la traslazione del tempo

$$y(t) = x(t - t_0) \qquad STFT_y(t, f) = STFT_x(t - t_0, f)$$

  - Invarianza per la traslazione in frequenza

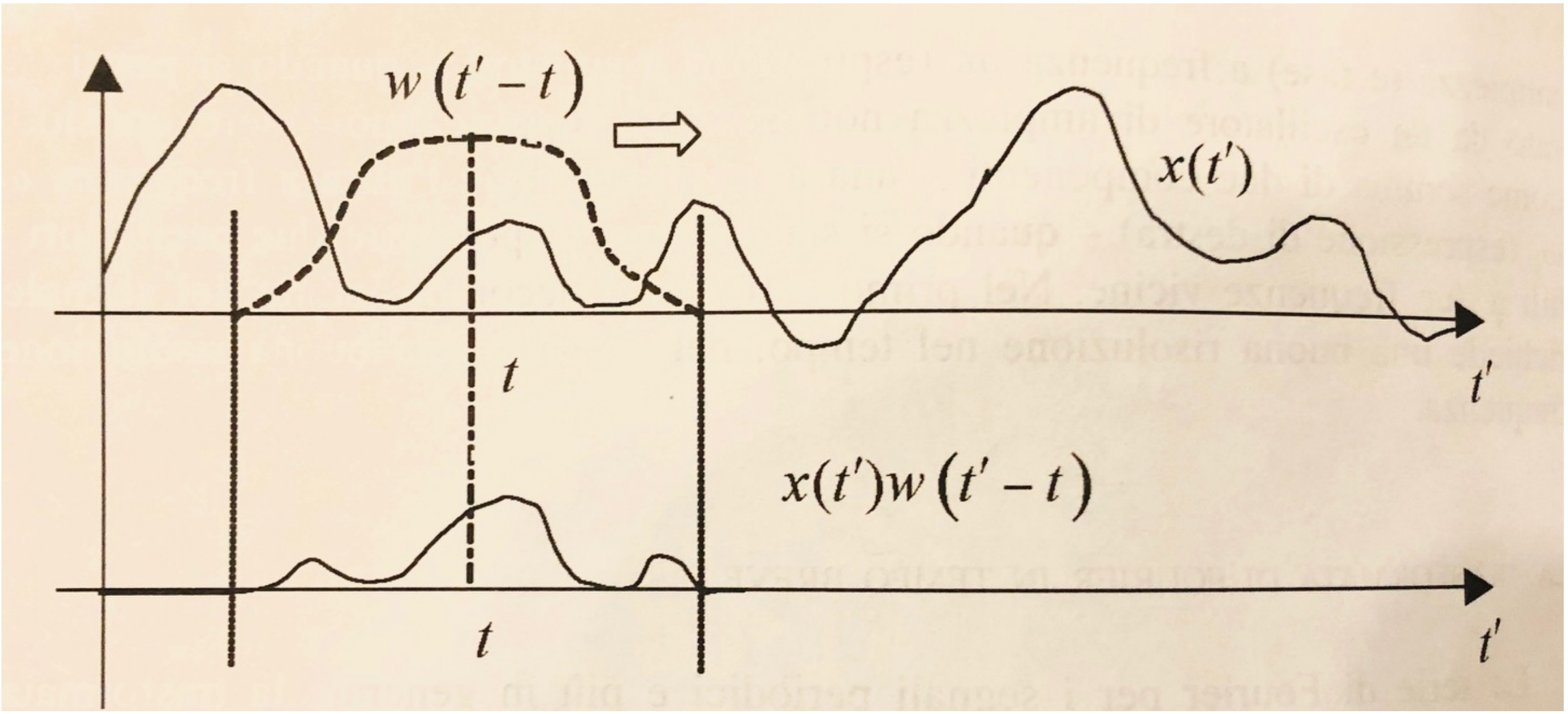
$$y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \qquad STFT_y(t, f) = STFT_x(t, f - f_0)$$

INTERPRETAZIONI DELLA STFT

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- STFT = traslazione in frequenza del segnale di –f seguita dalla convoluzione con la finestra w(t)

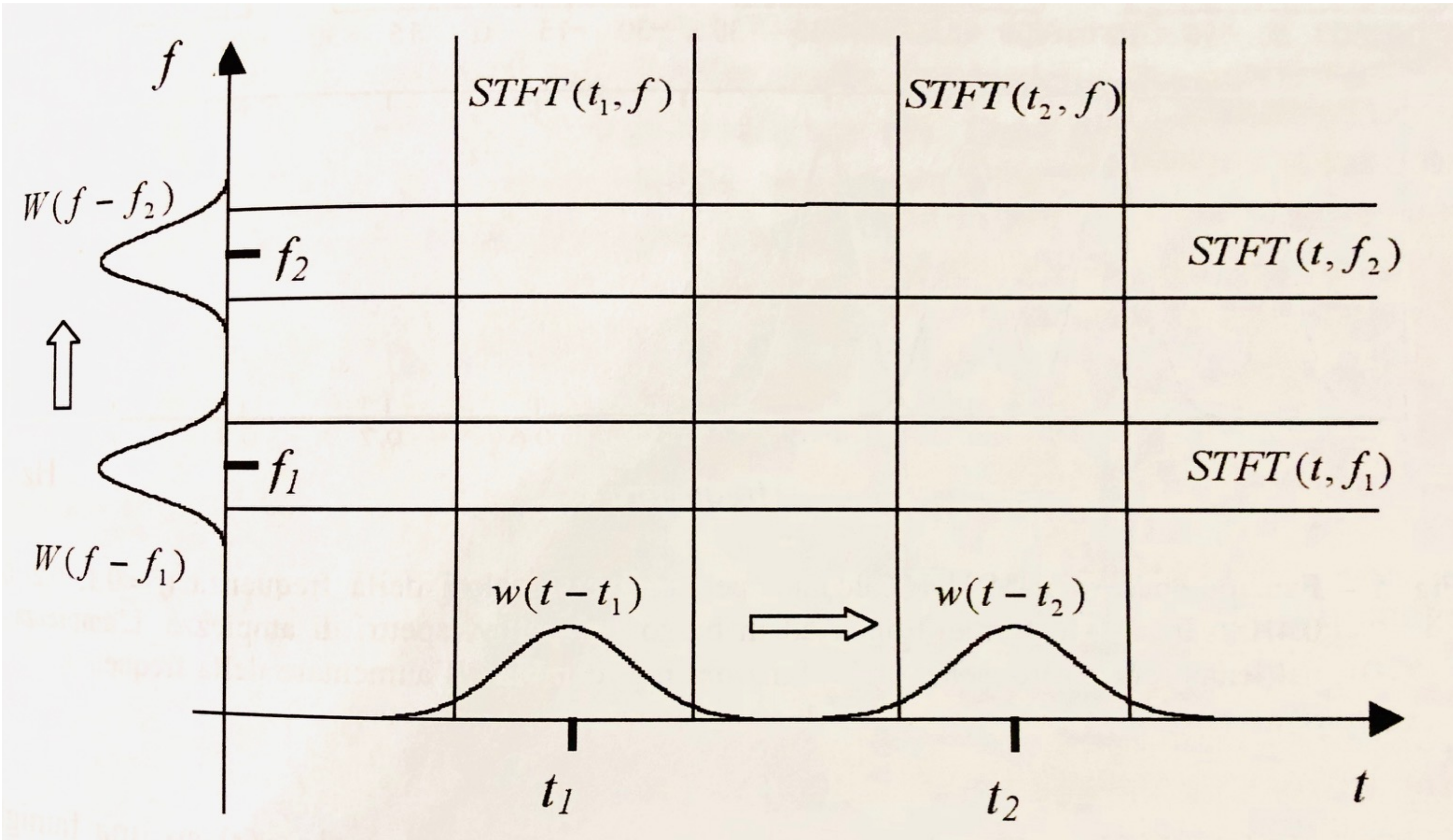
$$\text{STFT}\ (t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}}_{\text{Traslazione nelle frequenze}} w^*(\tau - t)\,d\tau$$



INTERPRETAZIONE DELLA STFT

- Convoluzione nel tempo = prodotto nelle frequenze → la FT della finestra w*(τ-t) è un filtro passa banda → la STFT può essere interpretata come banco di filtri

Ad ogni frequenza f_i la STFT è la potenza del segnale considerata in un passa banda selezionato da $W(f- f_i)$



Ad ogni istante t_i la STFT è la FT del segnale selezionato dalla finestra $w(t-t_i)$

VINCOLI

- Per avere una buona risoluzione temporale è necessaria una finestra w(t) stretta
- Per avere una buona risoluzione in frequenza è necessaria una banda stretta
- Le due necessità sono in antitesi → indice globale di risoluzione tempo-frequenza

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

FUNZIONI BASE

- Ponendo

$$h(\tau) = w(\tau - t)e^{j2\pi f\tau}$$

- La STFT può essere vista come scomposizione del segnale secondo la funzione base h(τ)

$$STFT(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h^*(\tau)d\tau$$

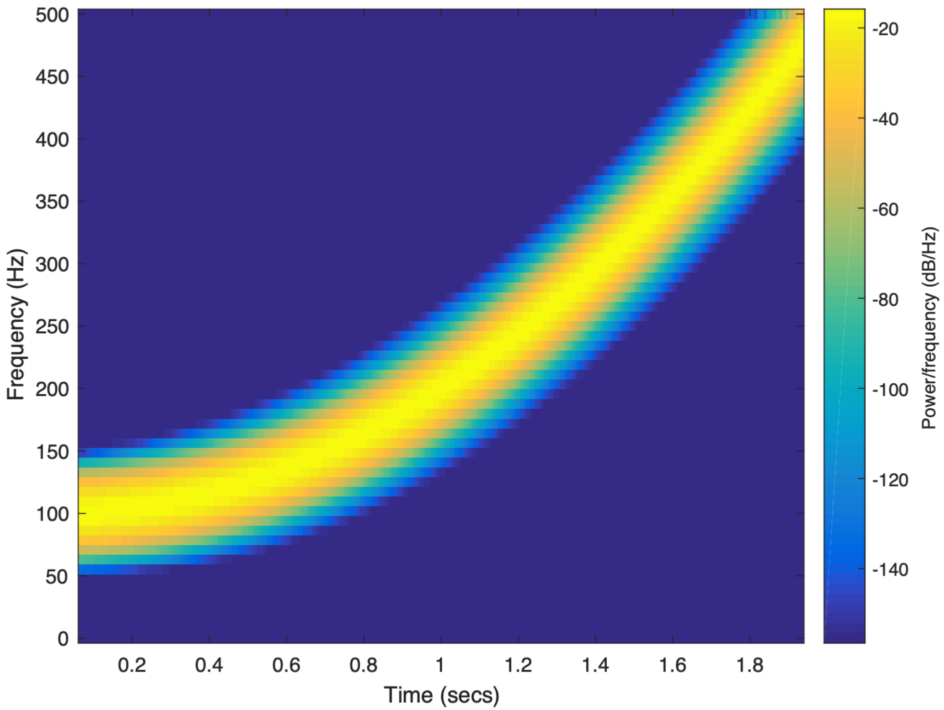
La STFT è la proiezione del segnale x(t) su una famiglia di funzioni che derivano da w(t) per mezzo di traslazione nel tempo o nella frequenza
→
nell'approccio wavelet si introduce un cambio di scala nel tempo al variare della frequenza in modo da ottimizzare il punto di osservazione in base alla frequenza considerate (**analisi in multirisoluzione**)

STFT IN MATLAB

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

```
spectrogram Spectrogram using a Short-Time Fourier Transform (STFT).
   S = spectrogram(X) returns the spectrogram of the signal specified by
   vector X in the matrix S. By default, X is divided into eight segments
   with 50% overlap, each segment is windowed with a Hamming window. The
   number of frequency points used to calculate the discrete Fourier
   transforms is equal to the maximum of 256 or the next power of two
   greater than the length of each segment of X.

   S = spectrogram(X,WINDOW,NOVERLAP,NFFT,Fs) Fs is the sampling frequency
   specified in Hz. If Fs is specified as empty, it defaults to 1 Hz. If
   it is not specified, normalized frequency is used.
```



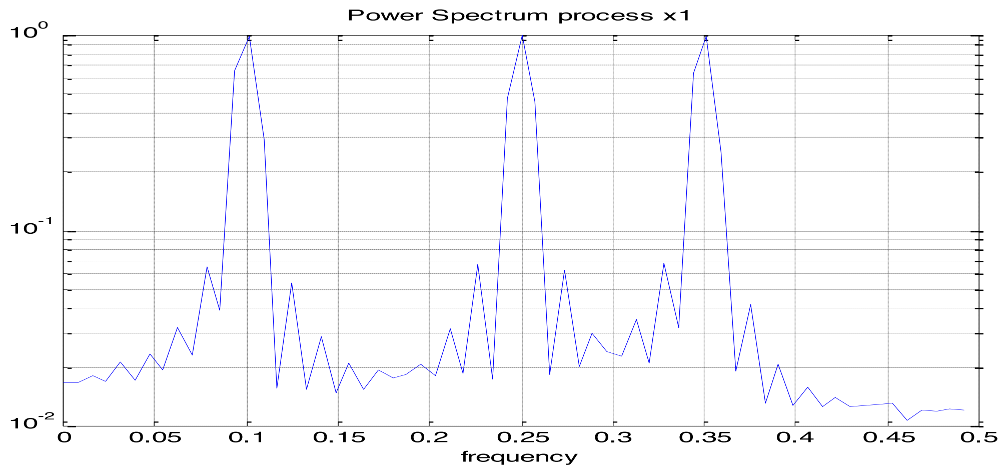
LIMITI DELLO SPETTRO DI POTENZA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esistono segnali diversi che hanno lo stesso spettro di potenza

$$x_1(n) = \cos(\omega_a n + \phi_a) + \cos(\omega_b n + \phi_b) + \cos((\omega_a + \omega_b)n + (\phi_a + \phi_b))$$
$$\omega_a = 2\pi f_1$$
$$\omega_b = 2\pi f_2$$
$$\phi_a, \phi_b = uniformly \quad distributed \quad independent$$

$$x_2(n) = \cos(\omega_a n + \phi_a) + \cos(\omega_b n + \phi_b) + \cos((\omega_a + \omega_b)n + \phi_c)$$
$$\omega_a = 2\pi f_1$$
$$\omega_b = 2\pi f_2$$
$$\phi_a, \phi_b, \phi_c = uniformly \quad distributed \quad independent$$



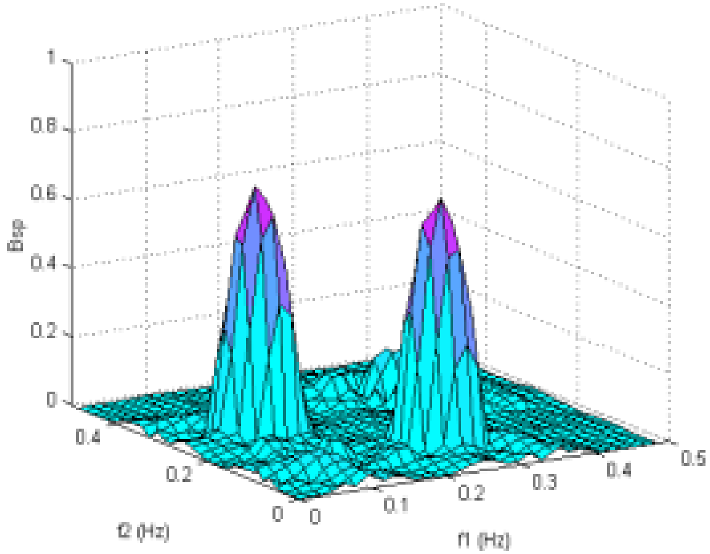
Lo spettro di potenza:

- Descrive completamente i processi GAUSSIANI
- Contiene le stesse informazioni della funzione di autocorrelazione
- **Sopprime tutte le relazioni di fase tra i ritmi presenti in un segnale**

HIGHER-ORDER SPECTRA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Noti come POLYSPECTRA
- **Definiti in termini di CUMULANTI DI ORDINE SUPERIORE**



- Contengono informazioni sulle **relazioni di fase**
- Contengono informazioni sulle **non linearità dei segnali**
- Possono essere utilizzati per l'analisi di segnali generati da sistemi complessi, anche formati da diversi generatori tra di loro sincronizzati

APPLICAZIONI

- Analisi degli accoppiamenti fra armoniche di un segnale
- Identificazione di sistemi o ricostruzione di segnali a fase non minima;
- Caratterizzazione ed estrazione di proprietà non lineari di segnali e identificazione di sistemi non lineari;
- Analisi della deviazione dalla gaussianità;
- Soppressione di rumore additivo gaussiano, non bianco, con spettro non conosciuto.

MOMENTI E CUMULANTI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Considero una variabile casuale *x* con distribuzione *f(x)*
- Momenti→ descrittori della *f(x)*
- Formula generale

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$g(x) \rightarrow polinomio$$

$$g(x) = x \rightarrow E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \rightarrow MEDIA$$

$$g(x) = x^2 \rightarrow E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \rightarrow AUTOCORRELAZIONE$$

$$g(x) = x^3 \rightarrow E[x^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx \rightarrow SKEWNESS$$

$$g(x) = x^4 \rightarrow E[x^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx \rightarrow KURTOSIS$$

MOMENTI E CUMULANTI

- I momenti possono essere definiti in modo generale introducendo la **FUNZIONE GENERATRICE DI MOMENTI**

$$\Phi(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{tx} dx$$

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots) f(x) dx = 1 + m_1 t + \frac{m_2 t^2}{2!} + \dots$$

- il momento di ordine r si definisce come derivata di ordine r della funzione generatrice dei momenti calcolata in $t=0$

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r} \Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f(x) \, dx \underset{t \to 0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) \, dx = E[x^r] = m_r$$

MOMENTI E CUMULANTI

- Esiste un'altra quantità che può essere definita tramite una funzione generatrice e che descrive la funzione di distribuzione di probabilità di una variabile casuale → **cumulante**

$$g(t) = \log(E[e^{tx}]) = k_1 t + \frac{k_2 t^2}{2!} + \frac{k_3 t^3}{3!} + \dots$$

- Il cumulante di ordine r si definisce come la derivata di ordine r della funzione generatrice dei cumulanti calcolata in t=0

$$g'(t) = k_1 + k_2 t + \dots \underset{t \to 0}{=} k_1$$

$$g''(t) = k_2 + k_3 t + \dots \underset{t \to 0}{=} k_2$$

MOMENTI E CUMULANTI

- Poiché la funzione generatrice dei cumulanti e la funzione generatrice dei momenti sono una il log dell'altra, i cumulanti possono essere espressi in termini di momenti (e viceversa)

$$k_1 = m_1$$

$$k_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\ldots$$

- Se la variabile è a media nulla → i primi tre momenti sono uguali ai primi tre cumulanti

$$k_1 = m_1$$

$$k_2 = m_2$$

$$k_3 = m_3$$

PROPRIETÀ DEI CUMULANTI

1. Scalabilità

$$cum(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) cum(x_1 \ldots x_n)$$

2. Invarianza rispetto all'ordine degli argomenti

$$cum(x_1, \ldots, x_n) = cum(x_{i1}, \ldots x_{in})$$

3. Additività

$$cum(x_0 + y_0, z_1, \ldots, z_n) = cum(x_0, z_1, \ldots, z_n) + cum(y_0, z_1, \ldots, z_n)$$

4. Invarianza rispetto a costanti additive degli argomenti

$$cum(\alpha + z_1, z_2, \ldots, z_n) = cum(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

5. La somma dei cumulanti di variabili indipendenti, è uguale al cumulante della somma delle variabili

$$cum(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = cum(x_1, \ldots, x_n) + cum(y_1, \ldots, y_n)$$

6. ***Se, dato un insieme n di variabili casuali, un suo sottoinsieme k è indipendente, allora il cumulante di ordine k è nullo***

CUMULANTI DI PROCESSI STOCASTICI STAZIONARI A MEDIA NULLA

- Se il processo è a media nulla, **i cumulanti fino al terzo ordine sono uguali ai momenti**

$$m_1 = c_1 = E[x(k)] = 0 \qquad \textit{media} \quad \textit{nulla}$$

$$c_2(\tau_1) = m_2(\tau_1) = E[X(k)X(k+\tau_1)] \qquad \textit{autocorrelazione}$$

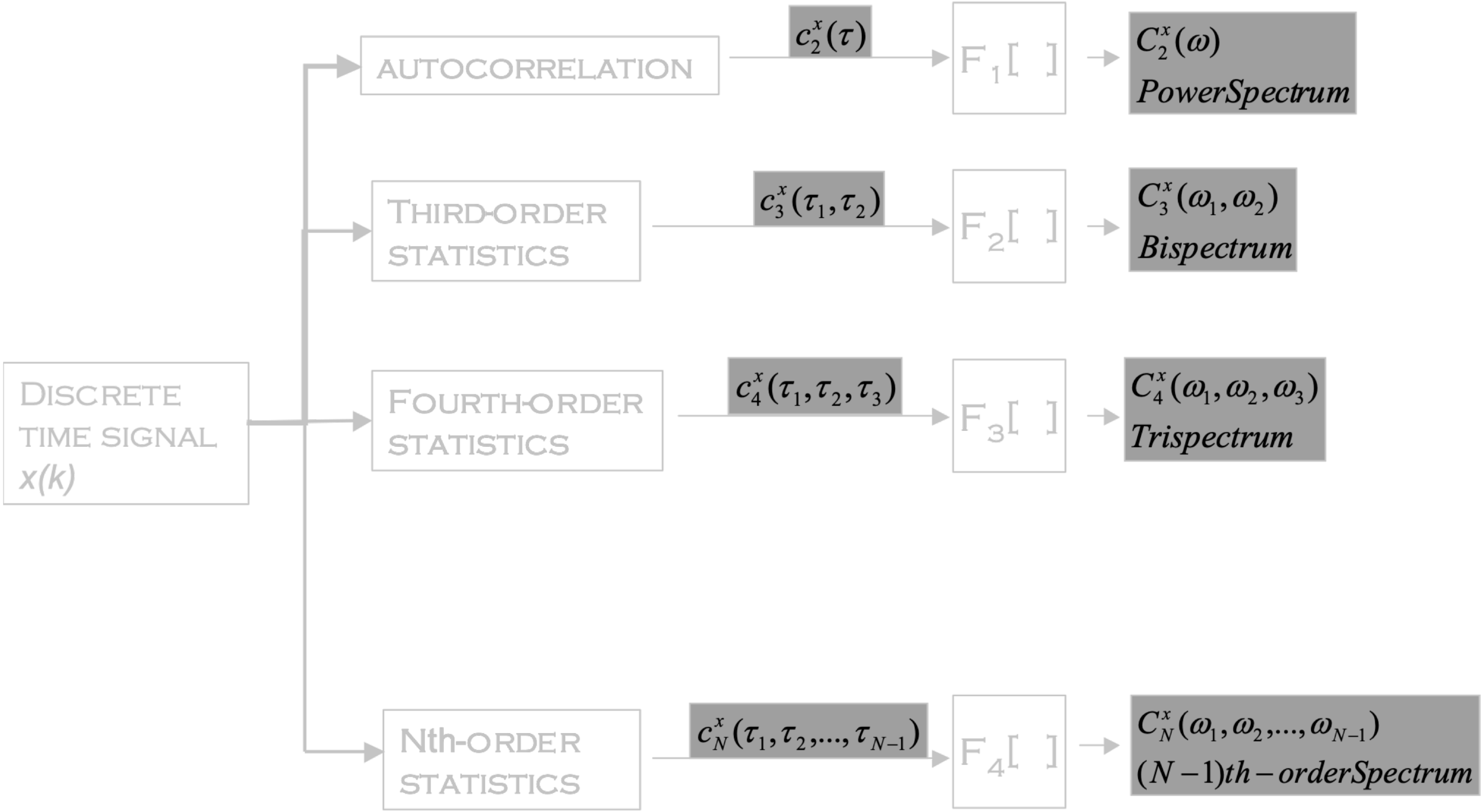
$$c_3(\tau_1,\tau_2) = m_3(\tau_1,\tau_2) = E[X(k)X(k+\tau_1)X(k+\tau_2)]$$

- I cumulanti di ordine superiore al terzo derivano dai momenti di ordine superiore, ma non sono identici

$$c_4 = m_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - m_2(\tau_1) * m_2(\tau_3-\tau_2) - m_2(\tau_2) * m_2(\tau_2-\tau_1) - m_2(\tau_3) * m_2(\tau_2-\tau_1) =$$
$$= E[X(k)X(k+\tau_1)X(k+\tau_2)X(k+\tau_3)]$$

SPETTRI DI ORDINE SUPERIORE

Lo spettro di ordine n è definito come **TRASFORMATA DI FOURIER MULTIDIMENSIONALE** della statistica (**cumulante**) di ordine n



OSSERVAZIONI

- Se il contributo dei singoli oscillatori X_i è indipendente, allora F_n è nullo
- L'altra condizione per cui è diverso da 0 è che la somma delle ωi sia nulla
- Lo spettro di ordine n di un segnale generato da un processo lineare può essere calcolato come

$$C_N(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{N-1}) = \gamma_N^{\nu} H(\omega_1) H(\omega_2) ... H(\omega_{N-1}) H^*(\omega_1 + \omega_2 + ... \omega_{N-1})$$

- Lo spettro viene definito in termini di cumulanti per alcune ragioni
  - ✓ il cumulante di ordine n>2 di un processo gaussiano è nullo, mentre il momento non lo è
  - ✓ I momenti non godono della proprietà VI elencata per i cumulanti
  - ✓ I cumulanti di ordine superiore di rumori bianchi non gaussiani sono impulsi multidimensionali
  - ✓ La somma dei cumulanti di processi indipendenti è uguale al cumulante della somma, mentre, nel caso dei momenti, questo è vero solo se si considera una singola variabile casuale

IL BISPETTRO

- Considero un processo stocastico stazionario **A MEDIA NULLA**

$$\{x(k)\} = \{x(1), x(2), \ldots, x(i), \ldots\}$$

- **Cumulante** del terzo ordine = **Momento** del terzo ordine

$$R(m,n) = E[x(k)x(k+m)x(k+n)]$$

- Bispettro= **trasformata di Fourier** del cumulante del terzo ordine

$$B(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R\ (m,n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n}$$

Il bispettro rappresenta le relazioni di fase costanti in un **dominio bidimensionale**.

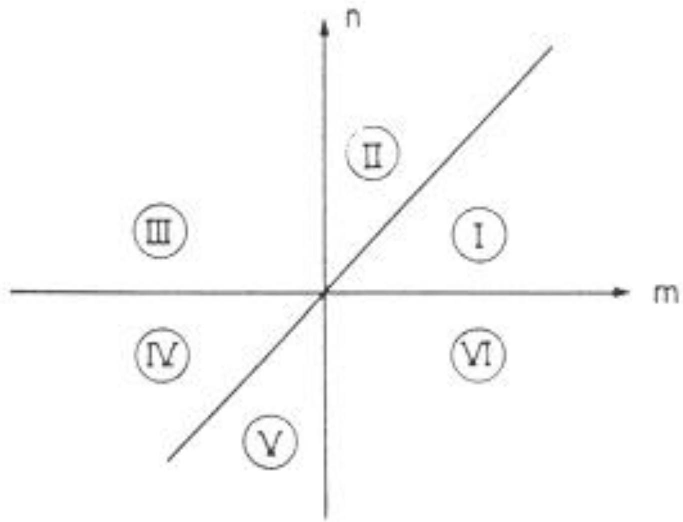
PROPRIETÀ

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Il bispettro eredita le proprietà di simmetria tipiche del cumulante del terzo ordine

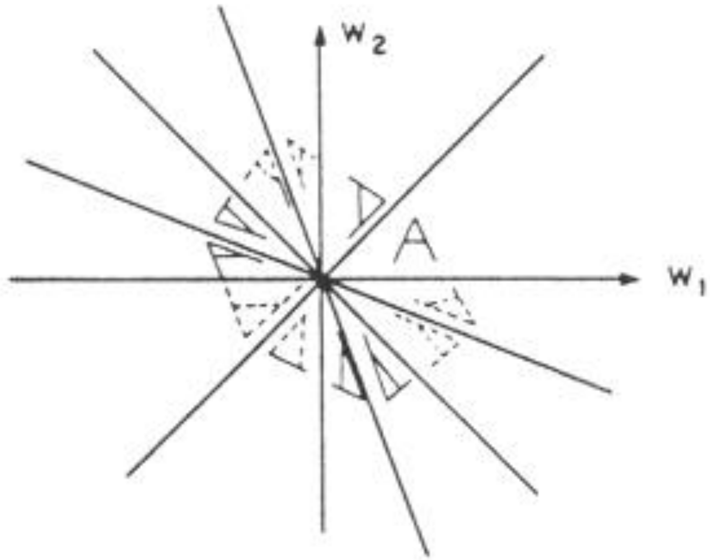
CUMULANTE

$$R(m,n) = R(n,m) = R(-n,m-n) =$$
$$= R(n-m,-m) = R(m-n,-n) =$$
$$= R(-m,n-m)$$



BISPETTRO

$$B_3(\omega_1,\omega_2) = B_3(\omega_2,\omega_1) = B^*{}_3(-\omega_2,-\omega_1) =$$
$$= B_3(-\omega_1-\omega_2,\omega_2) = B_3(\omega_1,-\omega_1-\omega_2) =$$
$$B_3(-\omega_1-\omega_2,\omega_1) = B_3(\omega_2,-\omega_1-\omega_2)$$



PROPRIETÀ

- La conoscenza del bispettro nella regione triangolare

$$\approx \quad \omega_1 >= \omega_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 <= \pi$$

è sufficiente per la conoscenza dell'intero bispettro

- È rappresentato da un numero complesso (modulo e fase)
- È periodico di periodo 2π su ambedue gli assi
- Il bispettro di un processo lineare può essere scritto come

$$B(\omega_1, \omega_2) = \gamma_3^{\nu} H(\omega_1) H(\omega_2) H^*(\omega_1 + \omega_2)$$

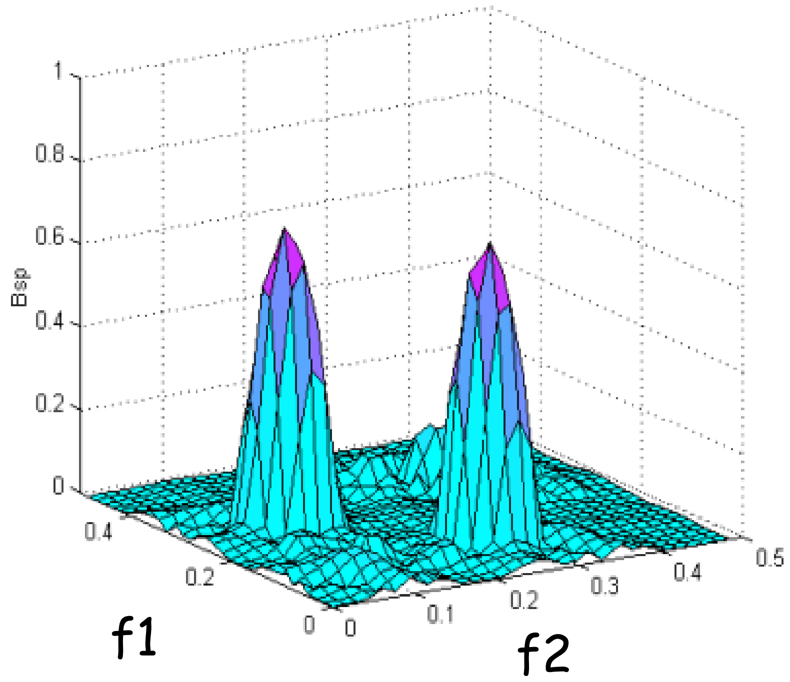
ESEMPIO

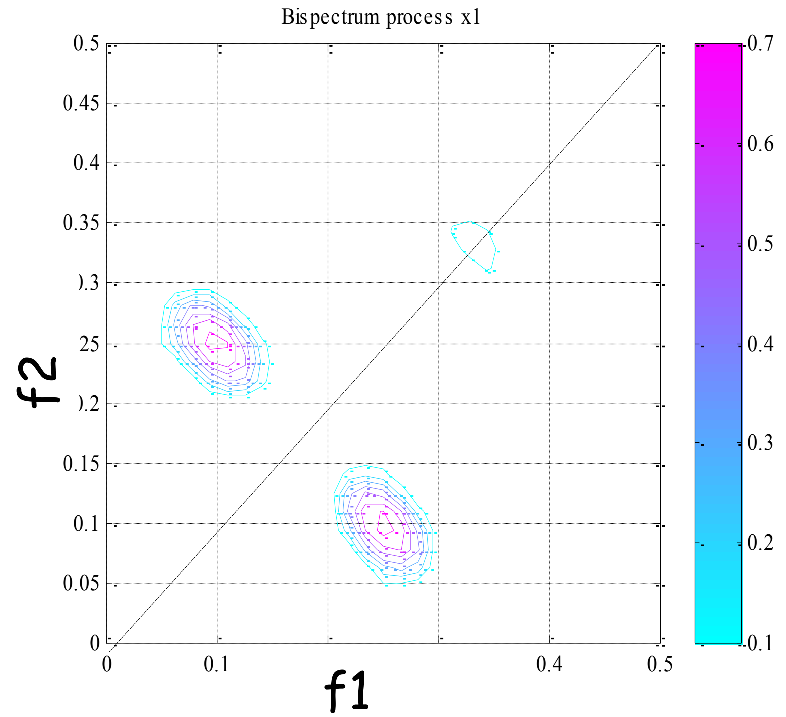
VISIONE TRIDIMENSIONALE:

sono rappresentate due zone di simmetria

VISIONE IN PROIEZIONE:

sono rappresentate due zone di simmetria





BICOERENZA

Spettro di potenza

Bispettro

BICOERENZA

$$Bic(\omega_1,\omega_2)=\frac{B(\omega_1,\omega_2)}{\sqrt{P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_1+\omega_2)}}$$

La bicoerenza è la **normalizzazione** del bispettro ripetto allo spettro di potenza e contiene le informazioni provenienti dall'uno e dall' altro

ESEMPIO

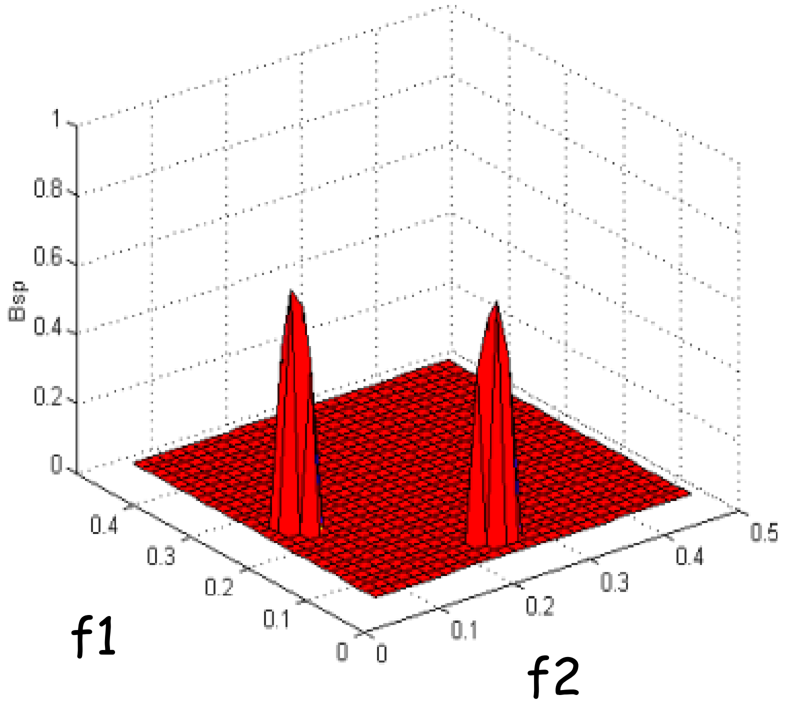
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

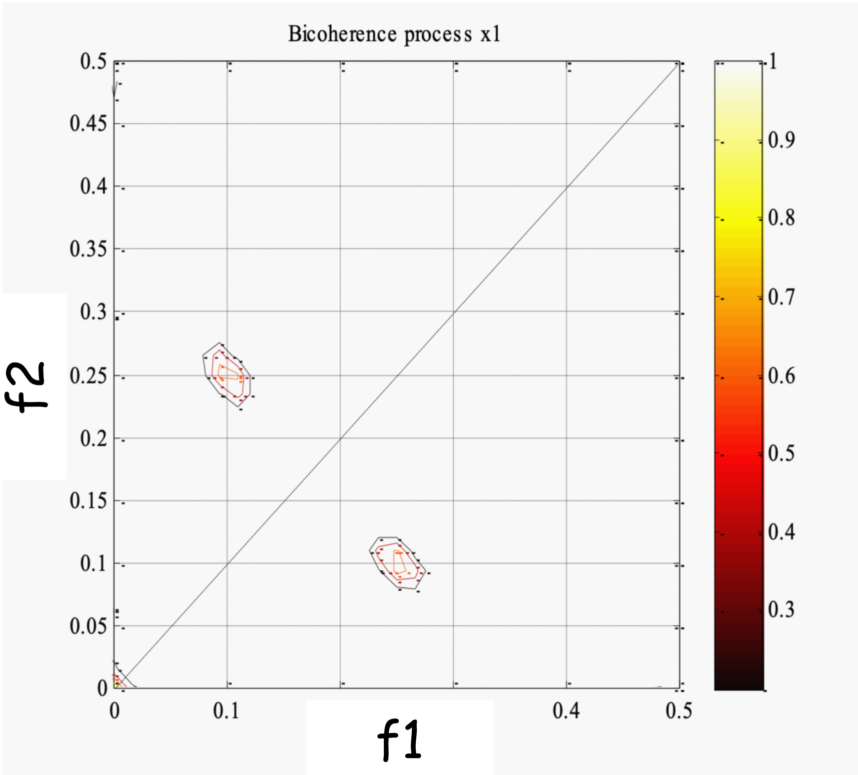
VISIONE TRIDIMENSIONALE:

sono rappresentate due zone di simmetria

VISIONE IN PROIEZIONE:

sono rappresentate due zone di simmetria





OSSERVAZIONI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- La bicoerenza è un indice che varia nell'intervallo 0-1
- Un picco di bicoerenza nel punto (f_1 , f_2) indica la presenza di una relazione di fase tra le frequenze f_1 , f_2 e $f_1 + f_2$ presenti nel segnale,
- L'indice bicoerenza è molto utile nell'individuazione dell'accoppiamento quadratico di fase:
  - ✓ Una bicoerenza vicina a 1 indica un alto accoppiamento quadratico di fase tra f_1 , f_2 e $f_1 + f_2$.
  - ✓ Una bicoerenza vicina a 0 indica un basso accoppiamento quadratico di fase tra f_1 , f_2 e $f_1 + f_2$

- La bicoerenza di un processo lineare non gaussiano è costante

$$\left|B(\omega_1,\omega_2)\right| = \frac{\gamma_v}{\gamma_v}\left|\frac{H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1+\omega_2)}{H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_1+\omega_2)}\right| = C$$

ACCOPPIAMENTO QUADRATICO DI FASE

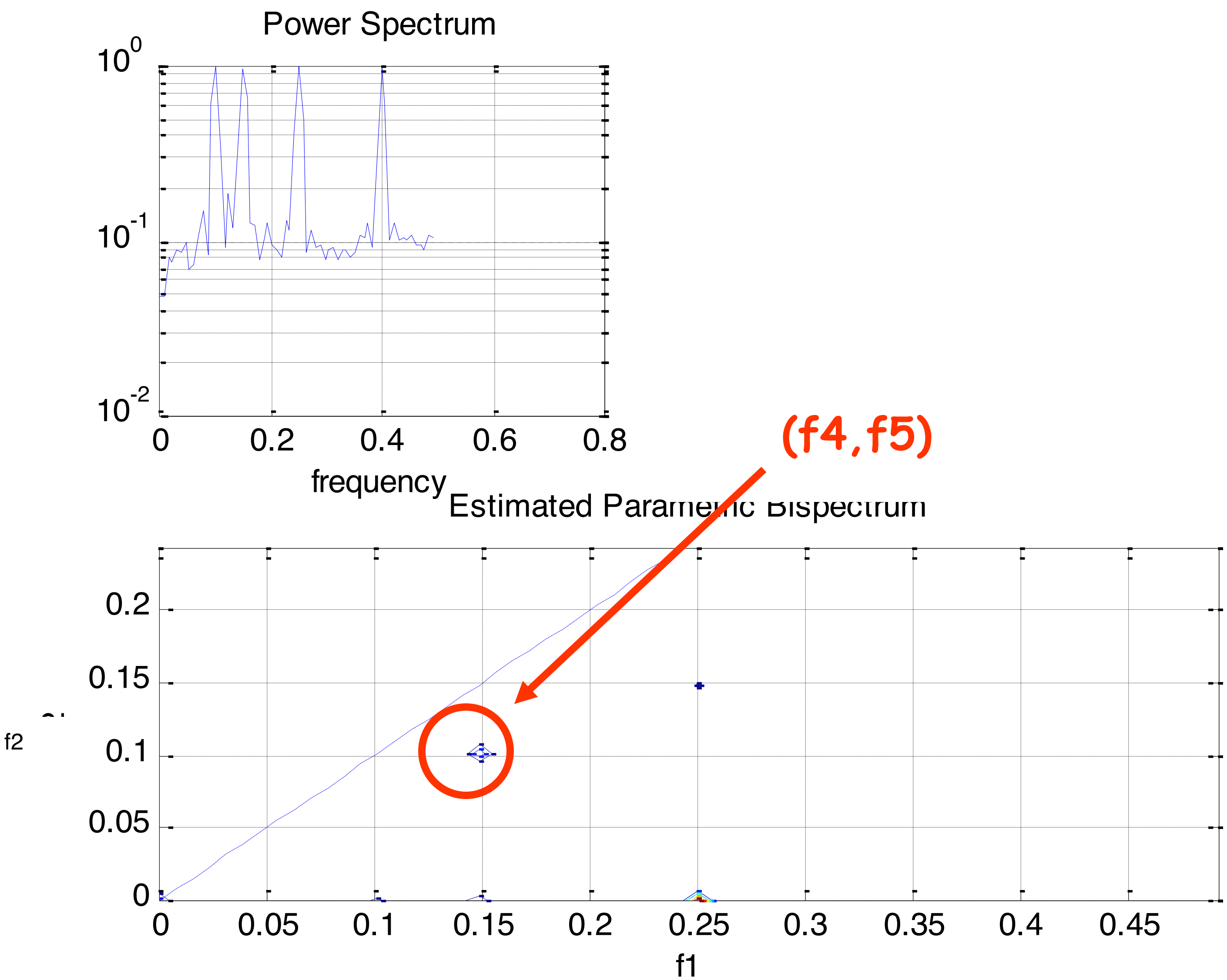
- L'accoppiamento quadratico di fase è un fenomeno per cui l'interazione non lineare tra due componenti spettrali f_1 e f_2 provoca la nascita di componenti spettrali alla somma/differenza di f_1 e f_2 .
- Questo può avvenire, ad esempio, se un segnale cosinusoidale passa attraverso un quadratore
- Ad esempio, $x(k) = \sum_{i=1}^{6} \cos(2\pi f_i + \phi_i)$ $\qquad f_3 = f_1 + f_2$

$$f_6 = f_4 + f_5$$
$$\phi_6 = \phi_4 + \phi_5$$

- In questo caso, solo la componente f_6 è il risultato di un accoppiamento di fase tra f_4 e f_5 .
- Calcolando il cumulante terzo, si osserva infatti che solo le componenti tra di loro in relazione di fase(f_4 , f_5 , f_6) compaiono nella formula

$$c_3(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{4}\{\cos(f_5\tau_1 + f_4\tau_2) + \cos(f_6\tau_1 + f_4\tau_2) + \cos(f_4\tau_1 + f_5\tau_2) + \cos(f_6\tau_1 - f_5\tau_2) +$$
$$+ \cos(f_4\tau_1 - f_6\tau_2) + \cos(f_5\tau_1 - f_{64}\tau_2)\}$$

ESEMPIO



f1=0.25;

f2=0.15;

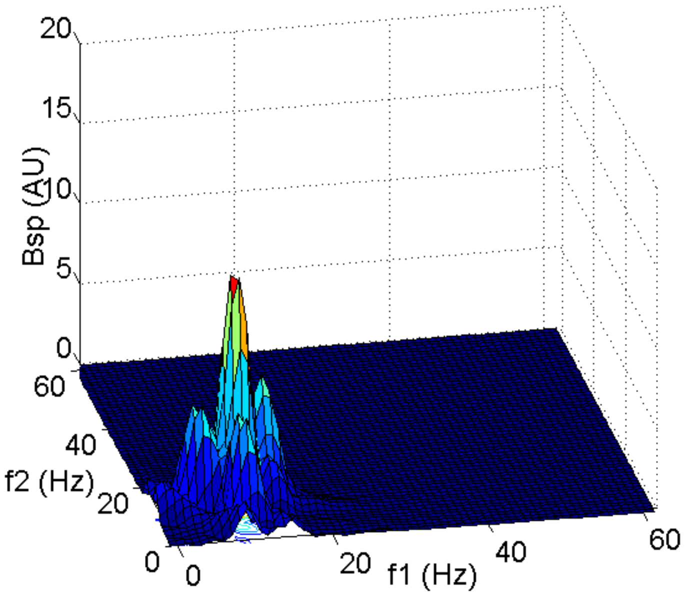
f3=f1+f2=0.4;

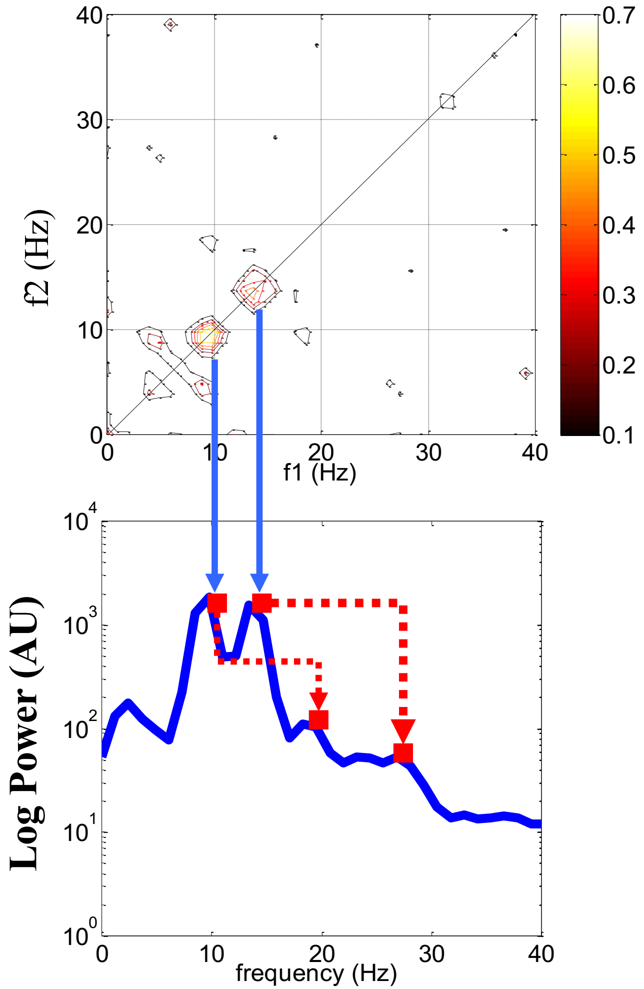
f4=0.1;

f5=0.15;

f6=f4+f5=0.25.

SIGNIFICATO





Se due componenti dello spettro di potenza f_1 e f_2 hanno una relazione di fase costante

- nello spettro compare una componente alla frequenza $f_1 + f_2$

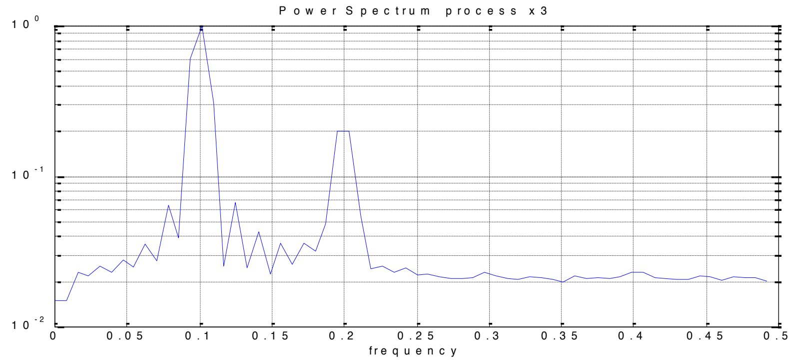
- nel bispettro e nella bicoerenza compare un picco a (f_1 , f_2)

ARMONICHE DI ORDINE SUPERIORE

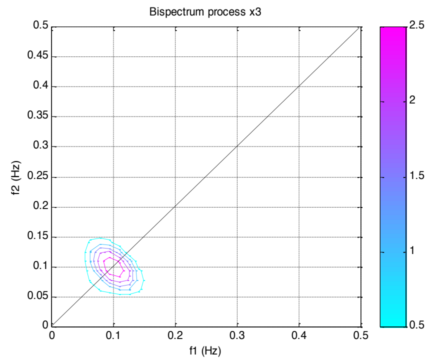
$$x_3(n) = \cos(\omega_a n + \phi_a) + \cos(2\omega_a n + 2\phi_a))$$

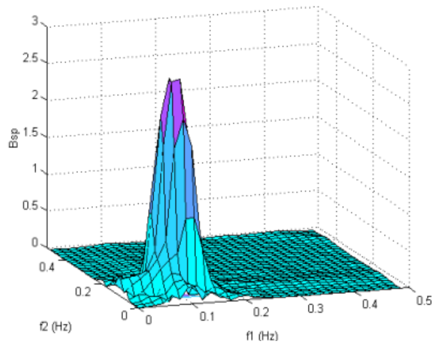
$$\omega_a = 2\pi f_1$$

$$\phi_a = indip \qquad uniforme$$

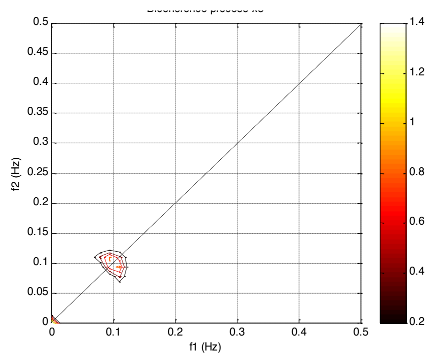


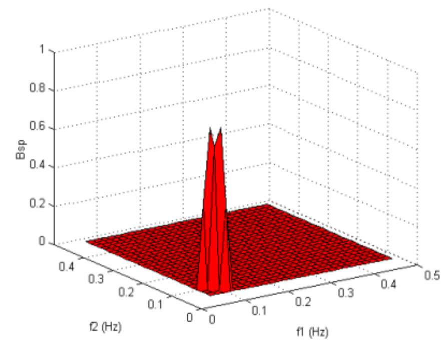
BISPETTRO →





BICOERENZA →





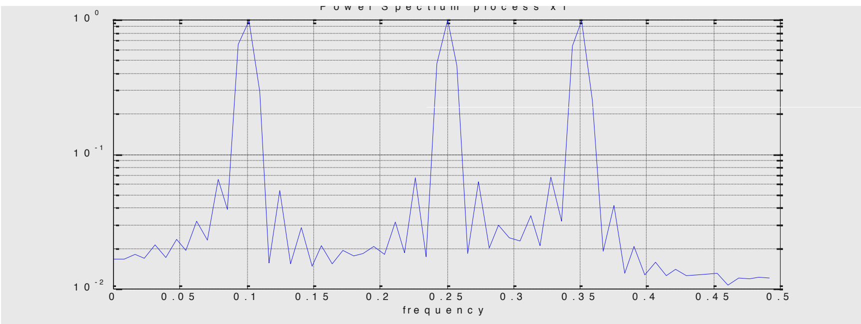
RUMORE GAUSSIANO

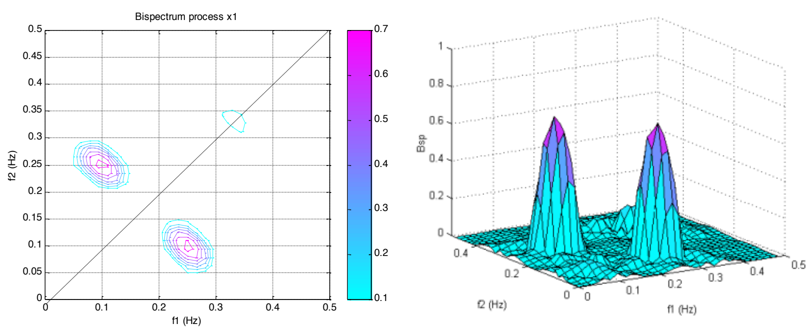
$$x_1(n) = \cos(\omega_a n + \phi_a) + \cos(\omega_b n + \phi_b) + \cos((\omega_a + \omega_b)n + (\phi_a + \phi_b))$$

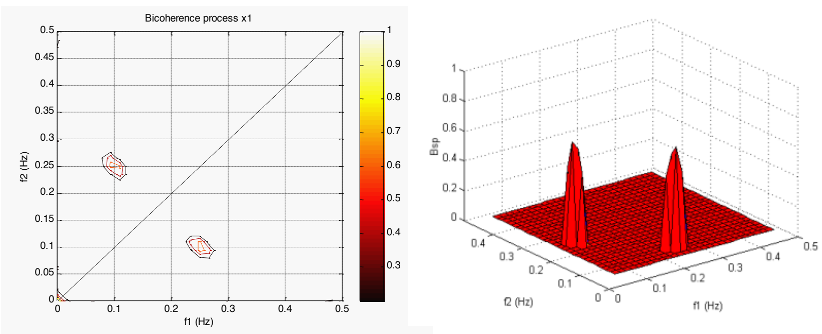
$$\omega_a = 2\pi f_1$$

$$\omega_b = 2\pi f_2$$

$$\phi_a, \phi_b = uniformly \quad distributed \quad independent$$





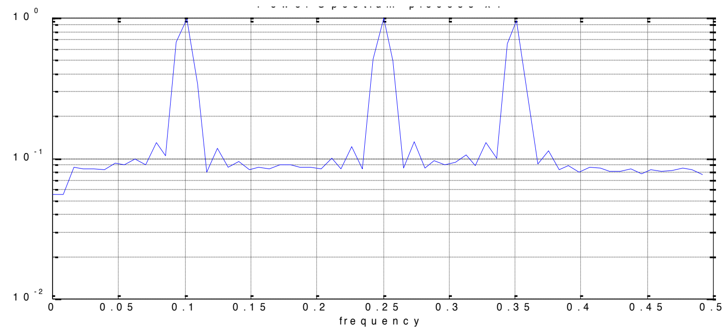


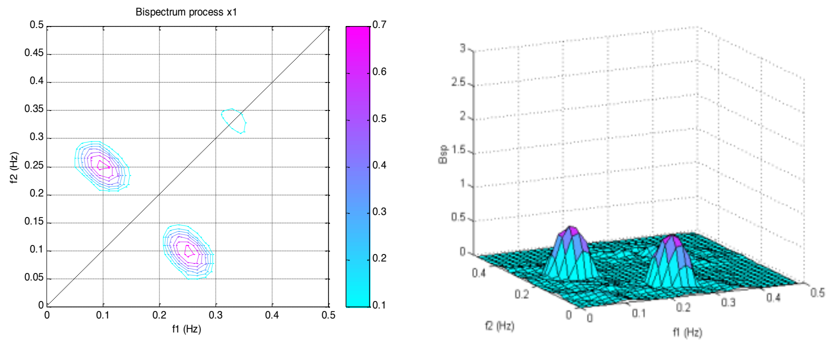
$$x_1(n) = \cos(\omega_a n + \phi_a) + \cos(\omega_b n + \phi_b) + \cos((\omega_a + \omega_b)n + (\phi_a + \phi_b)) + e$$

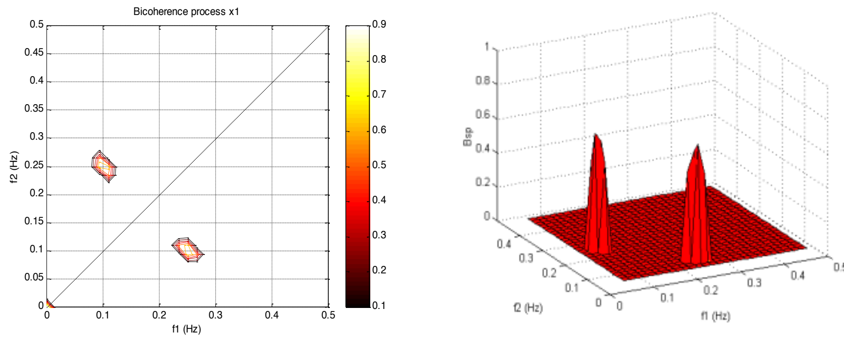
$$\omega_a = 2\pi f_1 \qquad \omega_b = 2\pi f_2$$

$$\phi_a, \phi_b = uniformly \quad distributed \quad independent$$

$$e \approx WGN(0,1)$$

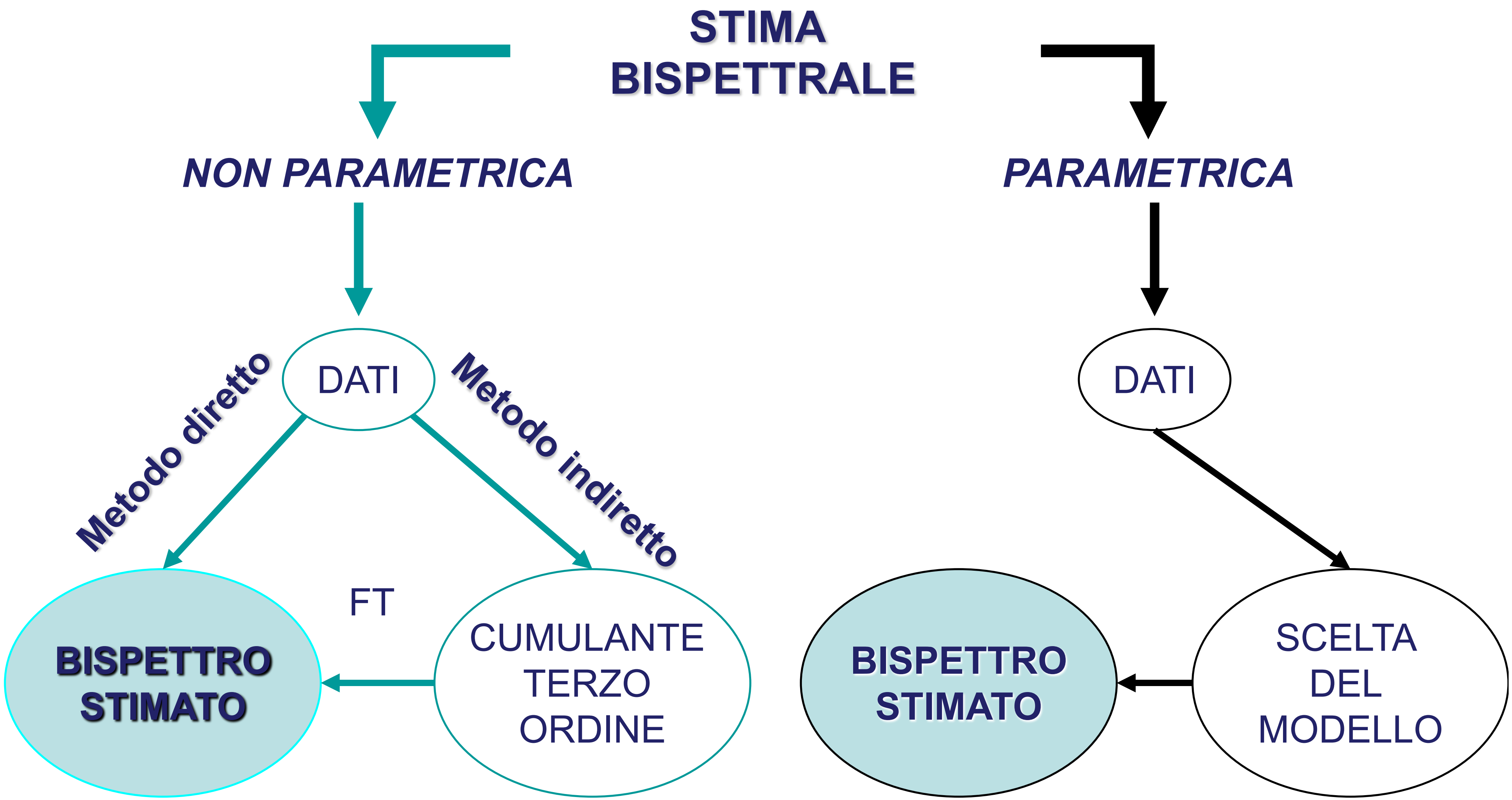






METODI DI STIMA BISPETTRALE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE



METODO DIRETTO

1. Si divide il segnale in K segmenti
2. Si sottrae la media ad ogni segmento
3. Si calcola la trasformata di Fourier per ogni segmento i-esimo

$$X^{(i)}(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} x^{(i)}(k) \exp(-j\omega k)$$

4. Si stima il bispettro per ogni segmento con la formula

$$\hat{b}_i(\omega_1, \omega_2) = X^{(i)}(\omega_1) X^{(i)}(\omega_2) X^{(i)*}(\omega_1 + \omega_2)$$

5. Il bispettro del segnale è stimato mediando quelli ottenuti sui *K* segmenti

$$\hat{B}^x(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \hat{b}_i \, (\omega_1, \omega_2)$$

METODO INDIRETTO

1. Si divide il segnale in K segmenti
2. Si sottrae la media ad ogni segmento
3. Si stima il momento del terzo ordine per ogni segmento

$$r^{i}(m,n)=\frac{1}{M}\sum_{l=s_1}^{s_2}x^{(i)}(l)x^{(i)}(l+m)x^{(i)}(l+n)$$

4. Si stima il cumulante come media dei momenti

$$\hat{c}_3^x(m,n)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}r^{(i)}(m,n)$$

5. Si calcola la trasformata (bidimensionale)

$$\hat{B}^x(\omega_1,\omega_2)=\sum_{m=-L}^{L}\sum_{n=-L}^{L}\hat{c}_3^x(m,n)W(m,n)e^{-j(\omega_1 m+\omega_2 n)}$$

dove *W(m,n)* è una finestra che soddisfacendo opportune condizioni può migliorare la stima.

PROPRIETÀ DEGLI STIMATORI

•**Correttezza** (la media dello stimatore tende al valore vero)

$$E[\hat{B}_{IND}(\omega_1,\omega_2)] \cong E[\hat{B}_{DIR}(\omega_1,\omega_2)] \cong B(\omega_1,\omega_2)$$

•**Consistenza** (la varianza tende a 0 per n che tende all'infinito, sia per il bispettro che per la bicoerenza)

•In particolare, Per la **bicoerenza** si ha che

$$\mathrm{var}(bi\hat{c}(f_1,f_2)) \cong \frac{N}{KM^2 f_{sampling}} = \frac{N_0^2}{N_{tot} f_{sampling}}$$

•Poiché la stima del bispettro/bicoerenza in un punto è indipendente statisticamente dalla stima in un altro punto e queste stime hanno una distribuzione normale *(N(0,1))*, allora il **modulo al quadrato della bicoerenza** ha una distribuzione di probabilità **chi quadrato con 2 gradi di libertà**

STIMA PARAMETRICA

1. Si divide il segnale in K segmenti
2. Si sottrae la media ad ogni segmento
3. Si stima il momento del terzo ordine per ogni segmento

$$r^i(m,n) = \frac{1}{M}\sum_{l=s_1}^{s_2} x^{(i)}(l)x^{(i)}(l+m)x^{(i)}(l+n)$$

4. Si calcola il momento del terzo ordine come media del momento sui singoli segmenti
5. Si sostituisce il momento nell'equazione per la stima dei parametri

$$\underline{\hat{R}}\underline{a} = \underline{\hat{\beta}}$$

$$\underline{\hat{R}} = \begin{bmatrix} \hat{R}(0,0) & \hat{R}(1,1) & \dots & \hat{R}(p,p) \\ \hat{R}(-1,-1) & \hat{R}(0,0) & \dots & \hat{R}(p-1,p-1) \\ \dots & & & \\ \hat{R}(-p,-p) & \hat{R}(-p+1,-p+1) & & \hat{R}(0,0) \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} \quad \underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Si calcola la funzione di trasferimento e, quindi, il bispettro

$$\frac{\hat{B}(\omega_1,\omega_2)}{\hat{\beta}} = \frac{1}{\hat{A}(\omega_1)}\frac{1}{\hat{A}(\omega_2)}\frac{1}{\hat{A}(\omega_1+\omega_2)^*} \qquad \omega_1,\omega_2 \le \pi$$

STIMA DELLA BICOERENZA

- La bicoerenza riassume le caratteristiche dello spettro e quelle del bispettro
- Per stimare la bicoerenza è necessario stimare sia lo spettro che il bispettro
- Spettro e bispettro hanno metodiche di stima diverse, quindi **la bicoerenza nasce dalla combinazione di due stimatori diversi** (in particolare nella stima parametrica)
- La bicoerenza stimata non sempre è compresa tra 0 e 1
- La bicoerenza stimata contiene picchi dovuti al rumore
- È necessario introdurre una procedura di soglia che definisca una **BICOERENZA SIGNIFICATIVA** (al di sopra della soglia di significatività)

SOGLIA DI SIGNIFICATIVITÀ

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- La stima della bicoerenza si ottiene inserendo le stime del bispettro e dello spettro nella formula

$$B\hat{i}c(\omega_1,\omega_2)=\frac{\hat{B}(\omega_1,\omega_2)}{\sqrt{\hat{P}(\omega_1)\hat{P}(\omega_2)\hat{P}(\omega_1+\omega_2)}}$$

- La soglia di significatività è fissata in base alle proprietà statistiche del suo stimatore (chi-quadro a due gdl) e vale:

$$\left|B\hat{i}c(\omega_1,\omega_2)\right|^2 \geq 6\sigma^2$$

$$\sigma^2=\frac{N_0}{Nf_s}$$

con

$C =$ Costante

$N_0 =$ Numero di campioni per segmento

$N =$ Numero di campioni totale

$f_s =$ Frequenza di campionamento

- I picchi al di sopra di questa soglia sono ritenuti signifiacativi in quanto hanno il 5% di probabilità di essere dovuti al rumore

RIASSUMENDO..

- La STFT permette di introdurre l'informazione sulla localizzazione temporale di una certa oscillazione contenuta nel segnale
- Gli spettri di ordine superiore sono utili nella individuazione delle non linearità e delle relazioni di fase che caratterizzano un segnale
- Lo spettro del terzo ordine è chiamato bispettro (Il bispettro normalizzato è chiamato bicoerenza).
- La presenza di un picco bispettrale e di bicoerenza alle frequenze(f1 , f2) indica la presenza di una relazione tra le componenti spettrali alle frequenze f1 , f2 e f1 + f2