C'è una classe di matrici che non sono diagonalizzabili qualunque sia il campo base.

Def - una matrice di Jordan, o un blocco di Jordan, è una matrice della forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

triangolare inferiore (bassa) — triangolare superiore (alta)

Il nome viene da Camille Jordan, francese (1838 - 1922).

Altri matematici tedeschi: Pascual Jordan, importante per le algebre di Jordan, meccanica quantistica, quantum field theory (1902 - 1980); Wilhelm Jordan, algoritmo di Gauss - Jordan (1842 - 1899).

Si ha: $p_J(x) = (\lambda - x)^n$: unico autovalore λ con $m_a(\lambda) = n$.

$$Aut(\lambda) = \ker(J - \lambda E_n) = \ker \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

matrice di rango $n-1 \Rightarrow Aut(\lambda)$ ha dim 1, è la retta di equazioni $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, $Aut(\lambda) = \langle e_n \rangle$.

J non è diagonalizzabile ma è triangolare.

<u>Definizione</u> 1) $f: V \to V$ è triangolarizzabile (o triangolabile) se $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia triangolare (superiore o inferiore).

2) A matrice $n \times n$ è triangolarizzabile se è simile a una matrice triangolare.

<u>Teorema</u>

$f: V \to V$ è triangolarizzabile se e solo se $p_f(x)$ è prodotto di fattori lineari, ossia ha tutte le sue radici in K.

<u>Dim.</u>

Se f è triang., $\exists\, \mathcal{B}$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(f) =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow p_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

Viceversa, dim. per induzione su $n = \dim V$.

Per $n = 1$ è ovvio.

Supp. vero il teorema per $n-1$ e lo dim. per n.

Sia $p_f(x)$ prodotto di fattori lineari, $\dim V = n$.

Allora f ha almeno un autovalore λ

e un autovettore relativo $v_1 \neq 0$: $f(v_1) = \lambda v_1$.

Prolungo v_1 a una base di V: $B' = (v_1, w_2, \dots, w_n)$.

Allora $V = \langle v_1 \rangle \oplus \underbrace{\langle w_2, \dots, w_n \rangle}_{W}$. Pongo

$W := \langle w_2, \dots, w_n \rangle$ ha dim $n-1$ e base

$B'' = (w_2, \dots, w_n)$. Ogni vettore di V si scrive in

modo unico come $\mu_1 v_1 + \underbrace{\mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n}_{\in W}$

Def. $g : W \to W$ come segue:

$$w \xrightarrow{f} \underset{\mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n}{\overset{\|}{f(w)}} \xrightarrow{p} \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n$$

$g = p \circ f$, dove $p : V \to W$ è la proiezione, che è lineare. Dunque g è un endomorfismo di W.

Se dimostro che $p_g(x)$ è prodotto di fattori lineari, gli posso applicare l'ip. induttiva.

Considero $A = M_{B'}(f) = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ 0 & \\ \vdots & M_{B''}(g) \\ 0 & \end{pmatrix} \\ f(v_1) \;\; f(w_2) \; \dots \; f(w_n) \end{array}$ → questa è proprio la matrice di g rispetto a B''!

Allora $p_f(x) = \det(A - xE_n) =$ a blocchi

$= (\lambda - x) \det(M_{B''}(g) - xE_{n-1}) =$

$= (\lambda - x)\, p_g(x)$. Ma $p_f(x)$ è prodotto di fattori lineari, quindi anche $p_g(x)$ lo è.

Allora per ip. induttiva g è triangolabile, cioè $\exists (v_2, \ldots, v_n)$ base di W rispetto a cui la matrice di g è triangolare superiore.

Allora considero $M_B(f)$, dove $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e risulta triangolare superiore. ∎

Corollario

Usando tale teorema + teorema fondamentale dell'algebra, ogni endomorfismo su $\mathbb{C}$, o ogni matrice quadrata su $\mathbb{C}$, è triangolarizzabile.

Potenze di un endomorfismo e autospazi generalizzati:

Sia $g: V \to V$ un endomorfismo.

Possiamo considerare le sue potenze:

$g^2 = g \circ g$, $g^3 = g \circ g \circ g = g \circ g^2$, ecc.

Valgono le seguenti proprietà:

1) $\ker g \subseteq \ker g^2 \subseteq \ker g^3 \subseteq \dots \dots$ (*)

2) Se $\ker g^k = \ker g^{k+1}$ per un certo $k \geq 1$, da quel momento in poi nella catena (*) sono tutte uguaglianze.

3) Se $v \in V$ è un vettore t.c. $v \in \ker g^k$, allora $g(v) \in g^{k-1}$.

Dim.

1) Se $g(v) = 0$, $g^2(v) = g(g(v)) = g(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker g^2$. E così via. Se $v \in \ker g^k \Rightarrow g^k(v) = 0$. Allora $g^{k+1}(v) = g(g^k(v)) = g(0) = 0$.

2) Supp. $\ker g^k = \ker g^{k+1}$ e sia $v \in \ker g^{k+2}$. Allora $g^{k+2}(v) = 0 = g^{k+1}(g(v))$ e perciò $g(v) \in \ker g^{k+1} = \ker g^k$. Dunque $g^k(g(v)) = 0$

ovvia $g^{k+1}(v)=0$ e $v\in \operatorname{Ker} g^{k+1}$.

3) Se $g^k(v)=0$, scrivo $0=g^k(v)=g^{k-1}(g(v))$ e ottengo $g(v)\in \operatorname{Ker} g^{k-1}$. ■

Applicheremo queste proprietà nel caso in cui è dato un endomorfismo $f:V\to V$, di cui c'interessa di trovare una forma "canonica", $\lambda\in K$ è un autovalore di f, e $g=f-\lambda\, id_V$.

In questo caso $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Aut}(\lambda)$ e ha dimensione $m_g(\lambda)$.

Vale la seguente

<u>Prop</u> (senza dim.) Sia $g=f-\lambda\, id_V$.

1) Se $m_g(\lambda)=m_a(\lambda)$, nella catena $(*)$ sono ~~tutte~~ uguaglianze.

2) Se $m_g(\lambda)<m_a(\lambda)$ allora

$$\operatorname{Aut}(\lambda)=\operatorname{Ker}(f-\lambda\, id_V)=\operatorname{Ker}(g)\subsetneq \operatorname{Ker} g^2$$

ha dim $m_g(\lambda)$

e $\dim \operatorname{Ker} g^2\le m_a(\lambda)$.

3) Se $\dim \ker g^2 = m_a(\lambda)$, da quel momento in poi sono tutte uguaglianze: $\ker g \subsetneq \ker g^2 = \ker g^3 = \cdots$

Se $\dim \ker g^2 < m_a(\lambda)$, allora

$$\ker g \subsetneq \ker g^2 \subsetneq \ker g^3 \subseteq \cdots$$

Tutti i sottospazi della catena hanno dim $\leq m_a(\lambda)$, finché si arriva a un sottospazio $\ker g^k$, dove la catena si stabilizza, e si ha $\dim \ker g^k = m_a(\lambda)$. ∎

Poniamo $a = m_a(\lambda)$. Si ha la <u>notazione</u>:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Aut}_1(\lambda) := \ker g = \mathrm{Aut}(\lambda)\\
&\quad \cap_{\neq}\\
&\mathrm{Aut}_2(\lambda) := \ker g^2\\
&\quad \cap_{\neq}\\
&\quad \vdots\\
&\quad \cap_{\neq}\\
&\mathrm{Aut}_k(\lambda) := \ker g^k\\
&\quad \|\\
&\quad \vdots\\
&\quad \|\\
&\mathrm{Aut}_a(\lambda) := \ker g^a
\end{aligned}$$

: qui la catena si stabilizza certamente, ma potrebbe stabilizzarsi prima.

<u>Def.</u> autospazio generalizzato dell'autovalore λ è $\mathrm{Aut}_a(\lambda) = \mathrm{Aut}_k(\lambda) = \bigcup_{i \geq 1} \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V)^i$:

ultimo sottospazio della catena $(*)$, uguale all'unione dei sottospazi della catena.

Consideriamo un automorfismo $f: V \to V$ tale che $p_f(x)$ ha tutte le sue radici in K:

$$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1}(\lambda_2 - x)^{a_2} \cdots (\lambda_m - x)^{a_m}$$ con

$a_i = m_a(\lambda_i)$: f è triangolabile.

Si ha: $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

Per ogni autovalore λ_i di f consideriamo il suo autospazio generalizzato $Aut_{a_i}(\lambda_i) = \ker(f - \lambda_i id_V)^{a_i}$: ha dimensione a_i.

<u>Teorema</u> Sia $f: V \to V$ triangolabile. Allora

$$V = Aut_{a_1}(\lambda_1) \oplus Aut_{a_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus Aut_{a_m}(\lambda_m).$$

V è somma diretta degli autospazi generalizzati degli ~~suoi~~ autovalori di f.

(senza dim.)

Questo teorema servirà a costruire una forma canonica per la matrice di f.

Forma ~~normale~~ canonica di Jordan.

Sia λ un autovalore di $f : V \to V$.

Un <u>blocco di Jordan</u> relativo a λ è una matrice della forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$ triangolare inferiore.

Se J è la matrice di f rispetto a una base $B = (v_1, \dots, v_n)$, ciò significa che:

$f(v_1) = \lambda v_1 + v_2 \iff (f - \lambda id)(v_1) = g(v_1) = v_2$

$f(v_2) = \lambda v_2 + v_3 \iff (f - \lambda id)(v_2) = g(v_2) = g^2(v_1) = v_3$

$\vdots$

$f(v_{n-1}) = \lambda(v_{n-1}) + v_n \iff (f - \lambda id)(v_{n-1}) = g(v_{n-1}) = g^{n-1}(v_1) = v_n$

$f(v_n) = \lambda v_n \iff v_n$ è autovettore di λ

$g(v_1) = v_2$

$g^2(v_1) = v_3$

$\vdots$

$g^{n-1}(v_1) = v_n$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(v_1) = v_2 \\ g(v_2) = v_3 \\ \\ g(v_{n-1}) = v_n \\ g(v_n) = 0 \end{array}}$$

questo è il significato della condizione $M_B(f) = J$

Il teorema seguente dice che, se f ha tutti gli autovalori in K, c'è una base rispetto a cui la matrice di f è composta da blocchi di Jordan.

Teorema Forma canonica di Jordan.

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo tale che $p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} (\lambda_2 - x)^{a_2} \cdots (\lambda_m - x)^{a_m} \in K[x]$, con $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n = \dim V$.

Allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V, detta base di Jordan, unione di basi degli autospazi generalizzati $Aut_{a_i}(\lambda_i)$, tale che

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix}, \text{ con } r \geq m,$$

matrice a blocchi, dove ogni blocco J_i è un blocco di Jordan relativo a uno degli autovalori. Una tale matrice è detta matrice di Jordan. Inoltre:

1) la forma canonica di Jordan è unica a meno di permutazione dei blocchi;

2) il numero di blocchi di ogni autovalore λ_i è uguale a $m_g(\lambda_i)$;

3) preso un autovalore λ, sia $g = f - \lambda\, id_V$. Allora la massima dimensione di un blocco di Jordan di f è il minimo esponente k per cui $\ker g^k$ ha dimensione $m_a(\lambda)$.

Caso particolare

Se f ha un solo autovalore λ, con $m_a(\lambda) = n$, la massima dim. di un blocco di J. è il minimo k t.c. $\dim \operatorname{Ker} g^k = n$. Se f corrisponde alla matrice A, e g alla matrice $B = A - \lambda E_n$, $\dim \ker g^k = n \iff \ker g^k = V \iff g^k = 0 \iff B^k = 0$.

Quindi: la massima dim di un blocco di J. di λ è il minimo k t.c. $B^k = 0$.

In questo caso B è una matrice detta nilpotente, cioè con una potenza nulla, e k è detto indice di nilpotenza di B.

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{su } \mathbb{R}$$

$p_A(x) = (2-x)^3$, dunque c'è un solo autovalore $\lambda = 2$, con $m_A(2) = 3$; $g = L(A) - 2\,id_{\mathbb{R}^3}$

Sia $B = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: matrice di g

Ha rango 2

$Aut(2) = Aut_1(2) = Ker(L(B)) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid$

$B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\}$;

B ha rango 2
$\dim Aut(2) = 1 = m_g(2) \Rightarrow$ 2 blocchi di J

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = -x_3$

$x_1 = 4x_3 - 3x_3 = x_3$

$(x_3, -x_3, x_3)$

$Ker\, B = \langle (1, -1, 1) \rangle = \langle w_1 \rangle$

$Aut_2(2) = Ker\, B^2$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$ matrice di g^2, ha rango 1, $\dim Aut_2(2) = 2$: ancora minore di $3 = m_a(2)$)

$Aut_2(2)$: $x_2 + x_3 = 0$.

Costruisco una base di $Aut_2(2)$, formata da

w_1 e da un altro vettore w_2, per esempio $w_2 = e_1 = (1,0,0)$.

$$Aut_2(2) = \langle \underset{\in Aut_1(2)}{(1,-1,1)}, \underset{\notin Aut_1(2)}{(1,0,0)} \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$\underset{\text{dim } 1}{Aut_1(2)} \subsetneq \underset{\text{ha dim } 2 < 3 = m_a(2)}{Aut_2(2)} \subsetneq Aut_3(2).$$

Dunque $Aut_3(2)$ dev'essere tutto $\mathbb{R}^3$.

In effetti $B^3 = BB^2 = 0$. Posso completare w_1, w_2 a una base di $Aut_3(2)$, per esempio aggiungendo $e_3 = (0,0,1)$, che non appartiene ad $Aut_2(2)$.

$Aut_1(2)$ $\qquad w_1 = (1,-1,1)$ $\qquad \ker g$

$\cap \neq$

$Aut_2(2)$ $\qquad w_1, w_2 = (1,0,0)$ $\qquad \ker g^2$

$\cap \neq$

$Aut_3(2)$ $\qquad w_1, w_2, w_3 = (0,0,1).$ $\qquad \ker g^3$

Per costruire una base di J. parto da w_3:

Ora pongo $v_1 = w_3 = (0,0,1) \in \ker g^3 \setminus \ker g^2$

$v_2 = g(v_1) = Bv_1 = (3,-1,1) \in \ker g^2 \setminus \ker g$

$$v_3 = g(v_2) = Bv_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$= (2,-2,2)$ è autovettore $\in \ker(g)$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di Jordan.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = J$$ un blocco di Jordan di ordine 3

perché $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = v_3$, $g(v_3) = 0$.

$$S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si deve avere $J = S^{-1}AS$ ossia $SJ = AS$.

Verifica:

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Metodo per costruire una base di Jordan.

Per ogni autovalore λ dobbiamo costruire una base di $Aut_a(\lambda)$, dove $a = m_a(\lambda)$.

Costruiamo basi per gli autospazi generalizzati da $Aut_1(\lambda) = Ker(g)$ a $Aut_a(\lambda)$ ($= Ker(g^a)$), aggiungendo via via vettori.

Base

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Aut}_1(\lambda) & w_1, \dots, w_{b_1} \\
 & b_1 = m_g(\lambda) \\
\cap_{\neq} & \\
\mathrm{Aut}_2(\lambda) & w_1, \dots, w_{b_1} \mid w_{b_1+1}, \dots, w_{b_2} \\
 & b_2 = \dim \mathrm{Aut}_2(\lambda) \\
\cap_{\neq} & \\
\vdots & \vdots \\
\cap_{\neq} & \\
\mathrm{Aut}_k(\lambda) & w_1, \dots, w_{b_1} \mid w_{b_1+1}, \dots, w_{b_2} \mid \dots \mid \dots \mid \dots w_a \\
\parallel & \\
\mathrm{Aut}_a(\lambda) &
\end{array}
$$

$$
w_a \to g(w_a) \to g^2(w_a) \to \dots \to g^{k-1}(w_a)
$$

dà un blocco di J. perché l'ultimo è autovettore

Ora partiamo dall'ultimo: w_a e lo chiamiamo v_1, e consideriamo

$v_1, g(v_1), g^2(v_1), \dots, g^{k-1}(v_1)$: così andiamo indietro di uno a ogni passo; l'ultimo è un autovettore

$\boxed{\text{Questi vettori danno un blocco di J. di ordine } k}$

Ora cancello da ogni riga un vettore, e ricomincio dal basso, fino a esaurire tutti i vettori. Sono k_1 blocchi di J.

Esempio 2

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

$p_A(x) = (2-x)^2(3-x)^2$

$\lambda_1 = 2, \quad a_1 = 2$

$\lambda_2 = 3, \quad a_2 = 2$

2 autovalori < blocchi per $\lambda_1 = 2$ / blocchi per $\lambda_2 = 3$

~~Ba~~ Sia $B = A - 2E_4$, $C = A - 3E_4$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ha rg 3

$\Rightarrow mg(2) = 4-3 = 1$

$\Rightarrow$ un blocco di J. di ordine 2, per $\lambda_1 = 2$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rg 3

$\Rightarrow mg(3) = 1$

$\Rightarrow$ un blocco di J. di ordine 2 per $\lambda_2 = 3$. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Quindi la forma normale di J. di A è

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 3 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Base di Jordan:

$Aut(2) = \langle (1,0,0,0) \rangle = \langle e_1 \rangle$

$\cap +$

$Aut_2(2) = \langle e_1, e_2 \rangle$, $e_2 \notin Aut(2)$

$e_2 = v_1$, $v_2 = Bv_1 = (-1,0,0,0) \in Aut(2)$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Aut(3) = \langle (1,0,1,0) \rangle$

$\cap +$

$Aut_2(3) = \langle (1,0,1,0), (-2,1,0,1) \rangle$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

$(-2x_4 + x_3, x_4, x_3, x_4) =$
$= x_3(1,0,1,0) + x_4(-2,1,0,1)$

$v_3 = (-2,1,0,1) \notin Aut(3)$

$v_4 = Cv_3 = (1,0,1,0) \in Aut(3)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id)$$

$v_1 = e_2 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

VERIFICARE che $SJ = AS$.

Esempio 3 $\quad A \ 4\times 4$, λ autovalore con $m_a(\lambda)=4$

Le possibilità per la forma canonica di J. di A sono:

a) $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 4 \Rightarrow$ A è diagonalizzabile: 4 blocchi di J. 1×1

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

b) $m_g(\lambda) = 3 \Rightarrow$ 3 blocchi di J. di ordini 1, 1, 2

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

c) $m_g(\lambda) = 2 \Rightarrow$ 2 blocchi di J. di ordini 2, 2 opp. 1, 3

c1) $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

c2) $$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Per capire in che situazione ci si trova bisogna calcolare B e le sue potenze. Si det. il minimo h t.c. $B^h = 0$: h è il massimo ordine di un blocco di J.

a) $B^2 = 0$, $\quad$ c2) $B^2 \neq 0$, $B^3 = 0$

d) $m_g(\lambda) = 1 \Rightarrow$ 1 blocco di J

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Caso numerico:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad m_a(2) = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_g(2) = 4 - rg B = 2$$

Siamo in uno dei casi c)

$$B^2 = \begin{pmatrix} & 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B^2 = 4$$

$$\underset{\cap\!\!\!\!\!\!\!\!\quad}{\operatorname{Ker} B} = \langle \underset{\overset{\parallel}{w_1}}{e_1}, \underset{\overset{\parallel}{w_2}}{(0,1,1,0)} \rangle$$

$$K^4 = \operatorname{Ker} B^2 = \langle w_1, w_2, \underset{\overset{\parallel}{w_3}}{e_3}, \underset{\overset{\parallel}{w_4}}{e_4} \rangle$$

Base di J: $v_1 = e_4$, $v_2 = B e_4 = (0,1,1,0)$: I blocco
$\mathcal{B}$
$v_3 = e_3$, $v_4 = B e_3 = (1,0,0,0) = e_1$ II blocco

Allora $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array}\right)$.

Si potevano scambiare i primi 2 con i secondi 2 vettori di base.

<u>Altro esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad p_A(x) = (1-x)^4 : \lambda = 1$$

con $a = 4$.

$$B = A - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ ha rg 2, $mg(1) = 4-2 = 2$ $\Rightarrow$ 2 blocchi.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ha rg 1

$\dim Aut_2(1) = 3$

$B^3 = 0$

$Aut_1(1)$: $w_1 = (3,2,3,0)$ $\quad w_2 = \cancel{(-3,-2,0,+3)}$

$Aut_2(1)$: w_1, $\cancel{w_2}$ | $\cancel{w_3 = (0,1,0,0)}$

$Aut_3(1)$: w_1, $\cancel{w_2}$ | $\cancel{w_3}$ | $\cancel{w_4 = (1\ 0\ 0\ 0)}$

blocco 3×3
$$\begin{bmatrix} v_1 = w_4 \\ v_2 = B w_4 = (1\ 1\ 1\ 0) \\ v_3 = B v_2 = (0\ 0\ -1\ -1) \end{bmatrix}$$ devo cancellare un vettore da Aut_2 e da Aut_1.

blocco 1×1 [$v_4 = w_1$: l'unico rimasto, è un autovettore.

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right) \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica: $J = S^{-1} A S$ ovvia $SJ = AS$.

<u>Esercizio</u>

Mostrare che le seguenti matrici sono simili, determinando la forma canonica di J.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio</u>

Diagonalizzare, se possibile, la matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x+i)(x-i).$$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$Aut(i) = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + i y_2 = 0 \qquad Aut(i) = \langle (-i, 1) \rangle = \langle (i, -1) \rangle$

$$Aut(-i): \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x - iy = 0$$

$(i, 1)$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1} A S, \quad \text{con } S = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(S) = i + i = 2i \qquad S^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio   Tema d'esame   26/1/18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2,\ m_a(\lambda) = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg\, B = \begin{cases} 3 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$\dim Aut(2) = m_g(2) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Caso $a \neq 0$: un blocco di J, indipendente dai valori di a, b, c perché $a \neq 0$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ 1 & 2 & & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Aut(2) = \langle e_1 \rangle$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & ad+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ha } rg\ 2$$

$Aut_2(2)$: $x_3 = x_4 = 0$ $\qquad Aut_2(2) = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Aut_3(2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

$B^4 = 0$ $\qquad Aut_4(2) = \mathbb{R}^4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$

$\mathcal{B}$: $v_1 = e_4$

$v_2 = Be_4 = (c, d, 1, 0)$

$v_3 = Bv_2 = (ad+b, 1, 0, 0)$

$v_4 = Bv_3 = (a, 0, 0, 0)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & c & ad+b & a \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ dipende da a, b, c.

$\boxed{\text{Caso } a = 0}$: 2 blocchi di J.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Aut(2) = \langle e_1, \cancel{e_2} \rangle$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Aut_2(2) = \langle e_1, e_2, \cancel{e_3} \rangle$$

$B^{3} = 0$ → indice di nilpotenza

$$Aut_3(2) = \langle e_1, e_2, e_3, \cancel{e_4} \rangle$$

$\mathcal{B}$: $v_1 = e_4$

$v_2 = Be_4 = (c, d, 1, 0)$

$v_3 = Bv_2 = (b, 1, 0, 0) \in Aut(2)$] danno il 1° blocco 3×3

$v_4 = e_1$: dà il secondo blocco 1×1

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right) \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & c & b & 1 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio</u> Tema d'esame 11/7/18 e 5/9/18

Siano m, n due interi con $1 \le m \le n$. Dare <u>un esempio</u> di una matrice $n \times n$ che abbia un autovalore λ con $m_a(\lambda) = n$ e $m_g(\lambda) = m$.

$m_g(\lambda) = m \Rightarrow m$ blocchi di J.

$$\begin{array}{c} \\ m-1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \ddots \ \lambda & & & \\ \hline & & & \lambda & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

Per es. $m-1$ blocchi 1×1

1 blocco $\underset{\substack{\parallel \\ n-(m-1)}}{n - m + 1}$