Simulazione seconda prova di esonero 12 dicembre e svolgimento

giovedì 12 dicembre 2019 13:53

1. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ -3x \end{pmatrix}$$

- Se $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, e $\mathcal{E}'$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si scriva $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = M$.
- Si determini dim Im f e un'equazione cartesiana per Im f in $\mathbb{R}^3$
- Sia $r \subseteq \mathbb{R}^2$ la retta vettoriale: $x - y = 0$. Si determini la dimensione del sottospazio $f(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ e una sua base
- Si calcoli $M \cdot {}^tM = A$, il suo polinomio caratteristico $p_A(x)$ e il suo spettro $Sp(A)$.

2. Si trovi un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per:
   - il piano H contenente la retta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ e passante per $P = (1, 0, 0)$
   - il piano L ortogonale ad $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ e passante per $P = (1, 0, 0)$

Svolgimento:

1. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ -3x \end{pmatrix}$$

- Se $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, e $\mathcal{E}'$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si scriva $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = M$.

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\boxed{M = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}$

- Si determini dim Im f e un'equazione cartesiana per Im f in $\mathbb{R}^3$

Si ha: $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = rg\, f = rg\, M = 2,}$ perché $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3+3R_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, eq. cartesiana: $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ -3 & 0 & z \end{pmatrix} = 0$

$= 2(z + 3x) = 0$, $\boxed{3x + z = 0 \ : \ \operatorname{Im} f}$

- Sia $r \subseteq \mathbb{R}^2$ la retta vettoriale: $x - y = 0$. Si determini la dimensione del sottospazio $f(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ e una sua base

Osservo che $r = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, il suo generico vettore è $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, e si ha $f\left(\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ -3c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, quindi $\boxed{\dim f(r) = 1 \text{ con base } \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}}$

- Si calcoli $M \cdot {}^tM = A$, il suo polinomio caratteristico $p_A(x)$ e il suo spettro $Sp(A)$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $M \cdot {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} = A$

$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 0 & 4-x & 0 \\ -3 & 0 & 9-x \end{pmatrix} = (4-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-x & -3 \\ -3 & 9-x \end{pmatrix} = (4-x)\left((1-x)(9-x) - 9\right) = (4-x)(x^2 - 10x) = \boxed{x \cdot (4-x)(x-10)}$

$\boxed{Sp(A) = \{0, 4, 10\}}$

2. Si trovi un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per:
   - il piano H contenente la retta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ e passante per $P = (1, 0, 0)$

H deve appartenere al fascio di piani per r: $\alpha(x - y + z) + \beta(x + y - z - 2) = 0$; passaggio per $P = (1, 0, 0)$:

$\alpha(1 - 0 + 0) + \beta(1 + 0 - 0 - 2) = 0$

$\alpha - \beta = 0$; fisso ad esempio $\alpha = 1$: H ha equazione $x - y + z + x + y - z - 2 = 0$

$2x - 2 = 0$, cioè $\boxed{x - 1 = 0}$

Equazioni parametriche per H: $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = s \end{cases}}$

   - il piano L ortogonale ad r: (*) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ e passante per $P = (1, 0, 0)$

Troviamo delle equazioni parametriche per r: matrice completa associata a (*) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{R_2 - R_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases}$ $y = z + 1$

$z = t$, $y = t + 1$, $x = y - z = t + 1 - t = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}}$, vettore di direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v$

Ricordo che un piano $ax + by + cz = d$ è $\perp$ a $r \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è proporzionale a $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Siccome l'equazione cartesiana di un piano è determinata a meno di una costante moltiplicativa, posso scegliere $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi: L ha eq.: $0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = d$

$y + z = d$

Passaggio per $P = (1, 0, 0)$: $0 + 0 = d$

$\Rightarrow$ L: $\boxed{y + z = 0}$