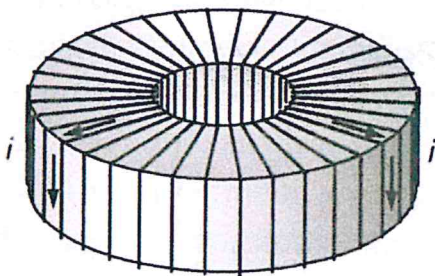


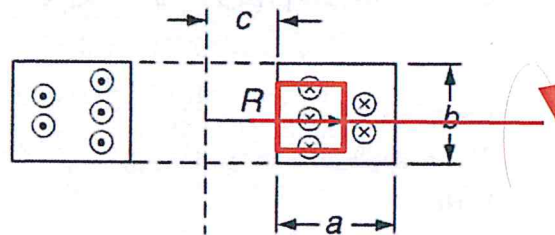
Cognome ..... Nome .....

Istruzioni per gli esercizi:

Per ciascuna domanda rispondere fornendo solo il risultato finale: la grandezza incognita espressa simbolicamente in funzione delle grandezze date o di quelle ottenute in altre risposte, e poi il corrispondente risultato numerico, con il corretto numero di cifre significative e con le unità di misura appropriate.



(a)



(b)

1. Consideriamo il grande solenoide toroidale già visto nella seconda prova intermedia: raggio interno  $c=1.10$  m, spessore radiale  $a=42$  cm, altezza  $b=2.0$  m, composto da  $N=65000$  spire nelle quali scorre una corrente continua di  $i_{sol}=110$  A, guidata da una tensione continua di  $V=12000$  V. All'interno del solenoide stavolta mettiamo una spira quadrata di lato  $L=31$  cm (in rosso), appoggiata al lato interno del solenoide (che parte quindi da  $r=c$ ), e posizionata a metà altezza. La spira ha una resistenza  $R_{spira}=19.2 \Omega$  e può ruotare su un asse radiale; chiamiamo  $\vartheta$  l'angolo tra il vettore superficie della spira e il campo magnetico, supponendo che siano inizialmente allineati.

a. Calcolate il coefficiente di mutua induzione tra la spira e il solenoide toroidale, in funzione dell'angolo  $\vartheta$ , trascurando la curvatura delle linee del campo magnetico. Nella risposta mettere in evidenza (come formula e valore numerico) il suo valore massimo  $M_0$ .

$$M = M_0 \cos \vartheta, \quad M_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} N L \mu_0 \frac{c+L}{c} = 1.00 \text{ mH}$$

b. La spira viene fatta ruotare da un agente esterno a frequenza  $\nu=22$  Hz; chiamando  $\vartheta = \omega t$  calcolate la corrente  $i_{spira}$  che circola nella spira.

$$i_{spira} = \frac{M_0 I_{sol} \omega}{R_{spira}} \sin \omega t = 0.73 \text{ A} \sin \omega t = 0.73 \text{ A} (-j e^{j\omega t})$$

c. Adesso teniamo la spira ferma a  $\vartheta=0$  e facciamo circolare nel solenoide toroidale corrente alternata, sempre di frequenza  $\nu=22\text{ Hz}$ , con lo stesso valore efficace della corrente continua,  $I_{\text{eff}}=110\text{ A}$ ; la resistenza  $R_{\text{sol}}$  del solenoide non cambia. Calcolate la corrente  $i_{\text{spira}}$  che circola nella spira in questo caso, e il suo sfasamento con la corrente del solenoide.

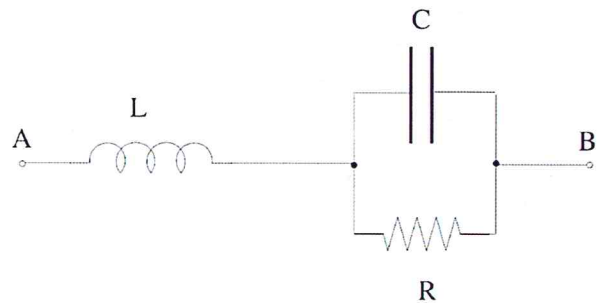
$$i_{\text{spira}} = \frac{M_0 \sqrt{2} I_{\text{eff}} \omega}{R_{\text{spira}}} \sin \vartheta = 1.12\text{ A } e^{j\omega t - j90^\circ}$$

d. Calcolate adesso la f.e.m. che la corrente della spira induce sul solenoide per mutua induzione, e dimostrate che è trascurabile per il solenoide stesso.

$$\mathcal{E}_{\text{ind, sol}} = - \frac{M_0^2 \sqrt{2} I_{\text{eff}} \omega^2}{R_{\text{spira}}} e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind, sol, eff}} = 0.110\text{ V} \ll 12000\text{ V}$$

2. Ai capi del tratto di circuito in figura, dove  $L=1\text{ H}$ ,  $R=500\ \Omega$ ,  $C=5\ \mu\text{F}$ , e' applicata una tensione di  $V_{\text{eff}}=220\text{ V}$  e  $\nu=50\text{ Hz}$ .



a. Calcolate l'impedenza equivalente (complessa) del circuito, sia come parte reale e immaginaria (numeri e formule) che come modulo e fase (qui bastano i numeri).

$$Z = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \left( \omega L - \frac{\omega R C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) = (309 + j71)\ \Omega$$

$$|Z| = 317\ \Omega, \quad \phi_z = 13.0^\circ$$

b. Usando queste quantità, calcolate la corrente efficace sull'induttanza e il suo sfasamento rispetto alla tensione.

$$i_z = \frac{\sqrt{2} V_{\text{eff}}}{|Z|} e^{j\omega t - j\phi_z}, \quad i_{z, \text{eff}} = 0.693\text{ A}, \quad \phi_i = -\phi_z = -13.0^\circ$$

c. Calcolate la potenza media dissipata sulla resistenza R.

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \left[ \left( 1 - \frac{\omega L}{|Z|} \sin \phi_z \right)^2 + \left( \frac{\omega L}{|Z|} \cos \phi_z \right)^2 \right] = 115\text{ W}$$

d. Supponiamo ora di cambiare la frequenza; mettendo a zero la parte immaginaria dell'impedenza complessa, calcolare la frequenza di risonanza del circuito e la sua impedenza in risonanza.

$$\omega_{\text{ris}} = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{R^2 C}{L} - 4} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4}{R^2 C^2}} = 200\text{ rad s}^{-1}, \quad \nu_{\text{ris}} = 31.8\text{ Hz}$$

Domanda Jolly: esprimere l'impedenza in generale e l'impedenza alla risonanza in termini di tempi scala dei circuiti RL, RC e LC.

$$Z_{\text{ris}} = \frac{L}{RC} = 400\ \Omega$$