Esercizi di Algebra

Esercizio 1 Sia $(G, \cdot)$ gruppo. Dimostrare che

$$G \simeq G/\{1_G\}$$

Esercizio 2 Sia

$$C([-1,1], \mathbb{R}) = \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \,\text{funzioni continue}\}$$

Dimostrare che

1. $C([-1,1], \mathbb{R})$ é un anello commutativo e unitario
2. $C([-1,1], \mathbb{R})$ non é un dominio d'integritá

Esercizio 3 Sia $(G, +)$ gruppo abeliano. Si consideri

$$End(G) = \{\varphi : G \longrightarrow G : \varphi \text{omomorfismo}\}$$

Su End(G) definiamo le seguenti operazioni: per ogni $f, g \in End(G)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f +_{End(G)} g)(x) := f(x) +_{\mathbb{R}} g(x)$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

Dimostrare che $(End(G), +, \circ)$ é un anello. É commutativo? É unitario? Giustificare la risposta.

Esercizio 4 (A, $+$, $\cdot$) anello commutativo. Sia

$$N = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0_A\}$$

1. Dimostrare che N é un ideale.
2. Sia

   $$A/N = \{[x] : x \in A\}$$

   Dimostrare che in A/N non esistono elementi nilpotenti (diversi da $[0_A]$).