Esercizi di Algebra

Esercizio 1 (A,+,·) anello.

1. Sia $a \in A$, $a \neq 0$. Dimostrare che se e a é nilpotente, allora a é un divisore dello zero.

2. Supponiamo che A sia un anello unitario. Sia $a \in A$ tale che $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a^2 = a$. Dimostrare che a é un divisore dello zero.

Esercizio 2 Siano I,J ideali (bilateri) di A anello. Dimostrare che:

1. $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$ é un ideale (bilatero) di A

2. $I \cap J$ é un ideale (bilatero) di A

3. $IJ = \{ij = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k : i_k \in I, j_k \in J, n \in \mathbb{N}\}$ é un ideale di A

Esercizio 3 Sia

$$A = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : 0 \leq f(x) \leq 1\}$$

Definiamo la seguente relazione su A:

$$\forall f, g \in A, \quad f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Dimostrare che $(A, \leq)$ é un reticolo
- $(A, \leq)$ é limitato? Giustificare la risposta.

Esercizio 4 Siano $(L, \leq)$ e $(L', \leq)$ due reticoli. Supponiamo che $f : L \longrightarrow L'$ sia un omomorfismo di reticoli

- Dimostrare che se $x \leq y$ allora $f(x) \leq f(y) \quad \forall x, y \in L$
- Dimostrare che in generale il viceversa non vale.

Esercizio 5 Sia $(L, \leq)$ reticolo booleano. Dimostrare che

$$x \leq y \quad \text{e} \quad v \leq u \quad \Longrightarrow \quad x \vee v \leq y \vee u$$