Prova scritta di Algebra 1
26 febbraio 2018

Risolvere i quattro esercizi proposti motivando adeguatamente le risposte.

1. Siano G ed H gruppi finiti e $f : G \to H$ un omomorfismo. Si dimostri che
   a) per ogni $g \in G$ si ha $o(f(g))$ divide $o(g)$
   b) se $o(f(g)) = o(g)$ per ogni $g \in G$, allora f è iniettivo
   c) se f è suriettivo, allora $|H|$ divide $|G|$
   d) se f è iniettivo, allora $|G|$ divide $|H|$.

2. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo abeliano.
   a) Sia S l'insieme degli elementi di periodo infinito di G. E' un sottogruppo?
   b) Sia T l'insieme degli elementi di periodo finito di G. E' un sottogruppo?
   c) Cosa possiamo dire nel caso in cui G non è abeliano.

3. Dimostrare quando il quoziente di un anello $(A, +, \bullet)$, commutativo ed unitario, rispetto un ideale I è un campo.

4. Assegnato il gruppo ciclico $(Z_{30}, +)$
   a) Determinare l'insieme H dei sottogruppi di $(Z_{30}, +)$
   b) tracciare il diagramma del reticolo H ordinato per inclusione
   c) determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di H
   d) stabilire se H è distributivo
   e) stabilire se H è di Boole.