

**Prova scritta di Algebra 1**  
**14 settembre 2018**

Risolvere i quattro esercizi proposti motivando adeguatamente le risposte.

1. Quante sono le applicazioni iniettive di un insieme di 5 elementi in uno di 8?

In generale, dati due insiemi finiti  $X$  e  $Y$  aventi, rispettivamente,  $h$  e  $k$  elementi, quante sono le applicazioni iniettive di  $X$  in  $Y$ ?

2. Dimostrare che un gruppo  $G$  (non ridotto alla sola unità) privo di sottogruppi propri è :

- ciclico;
- finito;
- di ordine primo.

3. Dimostrare che valgono le seguenti condizioni

- Un dominio di integrità finito è un campo.
- $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  è un campo se e solo se  $p$  è un numero primo.
- Se  $\mathbb{Z}_p$  è un campo quale proprietà ha l'ideale generato da  $p$ ?

4. Dimostrare che gli ideali di un anello formano un reticolo modulare.