Prova scritta di Algebra 1
24 settembre 2018

Risolvere i quattro esercizi proposti motivando adeguatamente le risposte.

1. Sia f: $A \to B$ una funzione.

   a) Si verifichi che f è suriettiva se e solo se, per ogni $B' \subseteq B$ risulta $B' = f(f^{-1}(B'))$;

   b) Siano P(A) e P(B) gli insiemi delle parti di A e B rispettivamente; sia $f^*: P(B) \to P(A)$ l'applicazione immagine inversa definita da $f^*(B') = f^{-1}(B')$. Verificare che f è suriettiva se e solo se f^* è iniettiva.

2. Dati G ed H gruppi ciclici finiti di ordine n e m rispettivamente, si verifichi quando G x H è ciclico.
   Z x Z è ciclico ?

3. Dimostrare quando il quoziente di un anello $(A, +, \bullet)$, commutativo ed unitario, rispetto un ideale I è un campo.

4. Assegnato il gruppo ciclico $(Z_{12}, +)$

   a) Determinare l'insieme H dei sottogruppi di $(Z_{12}, +)$ e tracciare il grafo del reticolo H ordinato per inclusione.

   b) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di H.

   c) Stabilire se H è distributivo.

   d) Stabilire se H è di Boole.