ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 10

Trieste, 20 dicembre 2019

1. (i) Per ciascuna delle seguenti matrici A, determinare la forma normale di Jordan, una base di Jordan e una matrice S tale $S^{-1}AS$ sia in forma normale di Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Stessa domanda del punto (i) per ciascuna delle seguenti matrici, dove a, b, c sono parametri reali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dare condizioni necessarie e sufficienti sui coefficienti $a, \dots, f$ affinchè la forma normale di Jordan della seguente matrice abbia un unico blocco di Jordan. In tale caso determinare anche una base di Jordan e la matrice S del cambiamento di base come negli esercizi precedenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Usando vettori e ortogonalità, si dimostrino i seguenti teoremi della geometria euclidea:

a) Il teorema di Talete che afferma che l'angolo opposto al diametro in un triangolo inscritto in una circonferenza è retto.

b) Le due diagonali di un rombo sono ortogonali.

c) I due teoremi di Euclide per i triangoli rettangoli.

d) Le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

4. Si consideri il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $b(z_1, z_2) = 2\mathfrak{Re}(z_1 z_2)$, dove $\mathfrak{Re}$ indica la parte reale di un numero complesso.

(1) Si dimostri che b è bilineare e simmetrica.
(2) Sia $\mathcal{B} = (1, i)$ base di $\mathbb{C}$; si calcoli $M_{\mathcal{B}}(b)$.
(3) Sia $\mathcal{C} = (z_1, z_2)$ una generica base di $\mathbb{C}$; si verifichi che

$$\det(M_{\mathcal{C}}(b)) = \left[\det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z_1} & \bar{z_2} \end{pmatrix}\right]^2 .$$