ESERCIZIO 1

Uno studio riguardante la bulimia tra ragazze universitarie ha considerato l'effetto degli abusi sessuali durante l'infanzia valutati attraverso una scala che misura l'ambiente familiare (*Family Environment Scale*). Relativamente alla variabile che misura la coesione familiare, per le 13 studentesse che avevano subito abusi sessuali la media e la deviazione standard erano uguali a 2.0 e a 2.1. Per le 17 studentesse che non avevano subito abusi sessuali la media e la deviazione standard erano uguali a 4.8 e 3.2.

a) Confronta le varianze dei due campioni, verifica se la varianza del punteggio del campione delle studentesse che non avevano subito abusi sessuali è maggiore e interpreta i risultati. $\alpha = 0.01$.

b) Verifica se per le studentesse che non avevano subito abusi sessuali il punteggio di coesione familiare è più alto del punteggio delle studentesse che avevano subito abusi sessuali. $\alpha = 0.01$. Utilizza il test adeguato, sulla base del risultato ottenuto in **a)** e interpreta i risultati.

ESERCIZIO 2

Una GSS ha chiesto a due campioni di femmine e di maschi se credessero oppure no alla vita ultraterrena. I risultati ottenuti sono i seguenti: su 582 femmine, 401 hanno risposto sì. Su 509 maschi, 392 hanno risposto sì.

a) Costruisci un intervallo di confidenza al 95% per la differenza fra femmine e maschi nel credere nella vita ultraterrena e interpretalo.

b) Esiste una differenza significativa fra femmine e machi nel credere nella vita ultraterrena? Svolgi una verifica di ipotesi con $\alpha = 0.05$ per rispondere a questo punto e interpreta i risultati.

QUESITO TEORICO

Immagina che una verifica di ipotesi abbia dato come risultato un valore con $p > \alpha$. Spiega perché nel discutere i risultati è più appropriata la terminologia "Non rifiuto H_0" rispetto ad "accetto H_0".

DOMANDA BREVE 1

Uno psicologo scolastico è interessato a conoscere il livello di "apertura mentale" di un gruppo di 25 docenti. A tale scopo somministra uno specifico test psicologico e ottiene un punteggio medio di 73 e una deviazione standard di 6.

Trova un intervallo di fiducia al 95% per la varianza.

DOMANDA BREVE 2

<u>Più di una risposta può essere corretta:</u>

Sia β la probabilità di commettere un errore del 2° tipo. Con un livello $\alpha = 0.05$ si verifica H_0: $\mu \leq 0$ contro H_1: $\mu > 0$ con $n = 30$ osservazioni, $\beta = 0.36$ per $\mu = 4$.

a) Se $\mu = 5$, allora per $n = 30$ e $\alpha = 0.05$, $\beta > 0.36$

b) se $\alpha = 0.01$, allora per $n = 30$ e $\mu = 4$, $\beta > 0.36$

c) Se $n = 50$, allora per $\mu = 4$ e $\alpha = 0.05$, $\beta > 0.36$

d) La potenza del test è 0.64 per $\mu = 4$, $n = 30$ e $\alpha = 0.05$

e) L'ipotesi deve essere falsa, perché necessariamente $\alpha + \beta = 1$.

RISOLUZIONE:

ES.1:

a)

Per verificare se la varianza del campione delle studentesse che non avevano subito abusi sessuali è maggiore della varianza delle studentesse che avevano subito abusi sessuali faccio una verifica di ipotesi (test F).

Le ipotesi sono:

H_0: $\sigma^2_2 \leq \sigma^2_1$ e H_1: $\sigma^2_2 > \sigma^2_1$.

Adesso calcolo la statistica test: $\boldsymbol{F} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$ (metto la varianza più grande al numeratore).

Ho le deviazioni standard campionarie quindi trovo che: $\boldsymbol{F} = \frac{3.2^2}{2.1^2}$ **= 2.322.**

A = 0.01, quindi devo confrontare questo valore con l'F "critico" che lascia alla sua destra il 0.01 dell'area. I gradi di libertà in questo problema sono al numeratore 16 ($n_2 - 1$) e al denominatore 12 ($n_1 - 1$).

Sulla tavola F a pag. 292-293 del libro di Luccio trovo che per i gdl sopra citati (16 approssimato a 15) la statistica test F "critica" è: $\mathbf{F_{cr}}$ **= 4.010**.

Osservo che **2.322 < 4.010**. Quindi non ho evidenze per rifiutare l'ipotesi nulla.

Quindi, non avendo evidenze per rifiutare l'ipotesi nulla, ritengo plausibile che essa sia vera. Ovvero, è plausibile che le varianze dei punteggi di coesione familiare delle due popolazioni (studentesse che non avevano subito abusi sessuali e studentesse che avevano subito abusi sessuali) non differiscano fra loro.

b)

Per risolvere questo punto devo utilizzare la t di Student. Nel punto **a)** ho trovato che non ci sono evidenze per rifiutare l'ipotesi nulla, ovvero è risultato plausibile che le due varianze (e di conseguenza deviazioni standard) fossero uguali. Quindi è accettabile assumere uguale deviazione standard delle due popolazioni e svolgere la verifica di ipotesi di conseguenza.

Con l'assunzione di uguali deviazioni standard bisogna trovare la stima della deviazione standard conglobata: $\mathbf{s_c} = \sqrt{\frac{(n_1-1)*s_1^2+(n_2-1)*s_2^2}{n_1+n_2-2}}$. Sostituendo: $\mathbf{s_c} = \sqrt{\frac{(12)*2.01^2+(16)*3.2^2}{13+17-2}}$ **= 2.782**.

L'errore standard è quindi: $\mathbf{se} = \mathbf{s_c}*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$. Sostituendo: $\mathbf{se} = 2.782*\sqrt{\frac{1}{13}+\frac{1}{17}}$ **= 1.025.**

Le ipotesi per questo punto sono:

H_0: $\mu_2 - \mu_1 \leq 0$ H_1: $\mu_2 - \mu_1 > 0$.

Calcolo la statistica test: $\mathbf{t} = \frac{(\bar{x}_2-\bar{x}_1)-(\mu_2-\mu_1)_0}{se}$. **Se** è quello trovato poco sopra, assumendo uguali deviazioni standard.

Sostituendo: $\mathbf{t} = \frac{(4.8-2.0)}{1.025}$ **= 2.73.**

α = 0.01. Quindi devo confrontare questo valore con la statistica test t "critica" che lascia alla sua destra il 0.01 dell'area. I gdl, vista l'assunzione di uguali deviazioni standard, è $n_1 + n_2 - 2$ (= 28).

Sulla tavola t a pag. 287 del libro di Luccio vedo che il valore t "critico" è 2.47. Osservo che **2.73 > 2.47**.

Quindi ho sufficiente evidenza per rifiutare l'ipotesi nulla. Quindi la ritengo implausibile e ritengo invece plausibile l'ipotesi alternativa. Ovvero, è plausibile che il punteggio medio di coesione familiare sia maggiore nella popolazione di studentesse che non avevano subito abusi sessuali che nella popolazione di studentesse che avevano subito abusi sessuali.

ES.2:

Prima di tutto, assegno e calcolo le proporzioni campionarie.

$K_1 = 401$ $n_1 = 582$; $K_2 = 392$ $n_2 = 509$

$\hat{\pi}_1$ (femmine) = 401/582 = 0.69 $\hat{\pi}_2$ (maschi) = 392/509 = 0.77

a)

Per trovare l'intervallo di confidenza della differenza fra le proporzioni di popolazione di donne e uomini, la formula è $\boldsymbol{(\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_1) \pm z*se}$. Dove: **z** è lo z-score per un livello di fiducia al 95% e **se** è l'errore standard della distribuzione campionaria $\boldsymbol{\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_1}$.

Z = 1.96

Se = $\sqrt{\frac{\hat{\pi}_1*(1-\hat{\pi}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\pi}_2*(1-\hat{\pi}_2)}{n_2}}$

Calcolo quindi:

$\boldsymbol{(\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_1) = 0.77 - 0.69 = 0.08}$

Se = $\sqrt{\frac{0.69*(1-0.69)}{582}+\frac{0.77*(1-0.77)}{509}}$ **= 0.0267**

Ricavo l'intervallo di confidenza:

0.08 ± 1.96*0.0267 = (0.03, 0.13).

L'interpretazione è: immaginando di eseguire il processo di campionamento innumerevoli volte, ho una fiducia del 95% che questo intervallo sia uno di quelli intervalli che contiene il valore della popolazione. Quindi, ho una fiducia del 95% nel ritenere che, nella popolazione, la differenza fra maschi e femmine nel credere nella vita ultraterrena vada da 0.03 (3%) a 0.13 (13%).

b)

Per rispondere a questo punto svolgo una verifica di ipotesi. Le ipotesi sono:

$H_0: \pi_2 - \pi_1 = 0$ $H_1: \pi_2 - \pi_1 \neq 0$

A questo punto devo trovare la statistica test. Per differenza fra proporzioni la statistica test è: **z =** $\frac{(\hat{\pi}_2-\hat{\pi}_1)-(\pi_2-\pi_1)_0}{se_0}$. Dove $\boldsymbol{(\pi_2 - \pi_1)_0}$ è la differenza assunta sotto l'ipotesi nulla e $\boldsymbol{se_0}$ è l'errore standard sotto l'assunzione dell'ipotesi nulla.

$\boldsymbol{se_0}$ = $\sqrt{\frac{\hat{\pi}_c*(1-\hat{\pi}_c)}{n_1}+\frac{\hat{\pi}_c*(1-\hat{\pi}_c)}{n_2}}$

Dove $\boldsymbol{\hat{\pi}_c}$ è la stima conglobata (proporzione della popolazione sotto l'assunzione dell'ipotesi nulla). $\boldsymbol{\hat{\pi}_c} = \frac{k_1+k_2}{n_1+n_2}$. Sostituendo: $\boldsymbol{\hat{\pi}_c} = \frac{401+392}{582+509}$ **= 0.73**.

Di conseguenza: $\mathbf{se_0} = \sqrt{\frac{0.73*(1-0.73)}{582} + \frac{0.73*(1-0.73)}{509}}$ **= 0.027.**

Posso quindi calcolare la statistica test: $\mathbf{z} = \frac{0.08}{0.027}$ **= 2.96.**

Trovo il p-valore associato a questa statistica test sulla tavola z a pag. 286 del libro di Luccio. Vedo che per z = 2.96 il p-valore è 0.0015. Visto che l'ipotesi è bilaterale devo raddoppiare questo p-valore: 2p = 0.003.

Confronto questo p-valore con il livello di significatività α e vedo che è inferiore. $0.003 < 0.05$.

Ho quindi evidenze per rifiutare l'ipotesi nulla. Sembrerebbe quindi plausibile che le distribuzioni di popolazione fra maschi e femmine differiscano. Di conseguenza è plausibile ritenere che ci siano differenze nel credere nella vita ultraterrena fra maschi e femmine.

QUESITO TEORICO:

È più appropriata una terminologia di questo tipo perché anche se otteniamo un risultato plausibile sotto l'ipotesi fatta in H_0, questo non esclude che tale risultato sia plausibile sotto altre ipotesi. Quindi, dato che un risultato è plausibile sotto diverse ipotesi, è improprio affermare che si accetta come vera quella fatta in H_0. Per questo è preferibile dire "Non rifiuto H_0", proprio perché rendiamo esplicito il fatto che l'ipotesi fatta in H_0 non è altro che una di quelle plausibili.

DOMANDA BREVE 1:

n = 25, s = 6.

L'intervallo di confidenza per σ^2 ha come formula: $\frac{(n-1)*s^2}{\chi^2_{1-(\alpha/2)}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)*s^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}}$

Dove **n** è il numero di osservazioni, $\mathbf{s^2}$ è la varianza campionaria,

$\boldsymbol{\alpha}$ è 0.05 (corrisponde a 1 – livello di fiducia dove il livello di fiducia è 95% in questo caso),

$\boldsymbol{\chi^2_{1-(\alpha/2)}}$ e $\boldsymbol{\chi^2_{(\alpha/2)}}$ sono le statistiche del χ^2 che per (n -1) gdl sono associate all'area espressa dal pedice (in questo caso 1 – 0.025 = **0.975** e **0.025**).

Cerco nella tavola χ^2 a pag. 294-295 del libro di Luccio i valori appropriati.

Incrociando 24 gdl con 0.975 trovo che $\boldsymbol{\chi^2_{0.975} = 12.4011}$**.**

Incrociando 24 gdl con 0.025 trovo che $\boldsymbol{\chi^2_{0.025} = 39.3641}$**.**

A questo punto sostituisco nella formula e trovo l'intervallo:

$$\frac{(25-1)*36}{12.4011} \geq \sigma^2 \geq \frac{(25-1)*36}{39.3641} \quad = \quad \mathbf{69.67 \geq \sigma^2 \geq 21.95.}$$

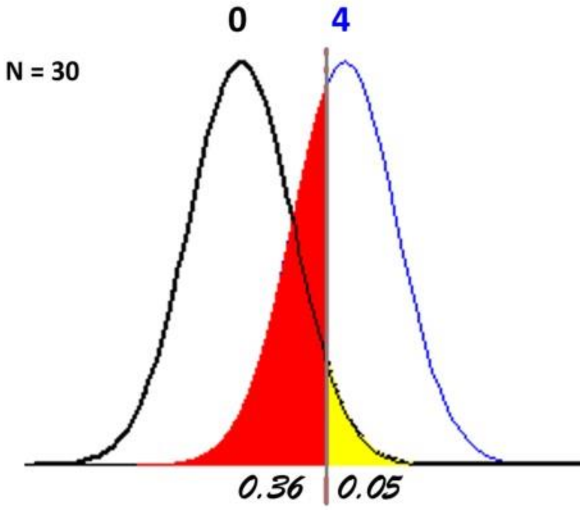
DOMANDA BREVE 2:

Le risposte corrette sono **b)** e **d)**.

Spiegazione:

$\boldsymbol{\alpha}$ è **l'errore del primo tipo**. Ovvero la probabilità di rifiutare H_0 quando invece NON bisognerebbe rifiutarla.

$\boldsymbol{\beta}$ è invece **l'errore del secondo tipo**. Ovvero la probabilità di NON rifiutare H_0 quando invece bisognerebbe rifiutarla.

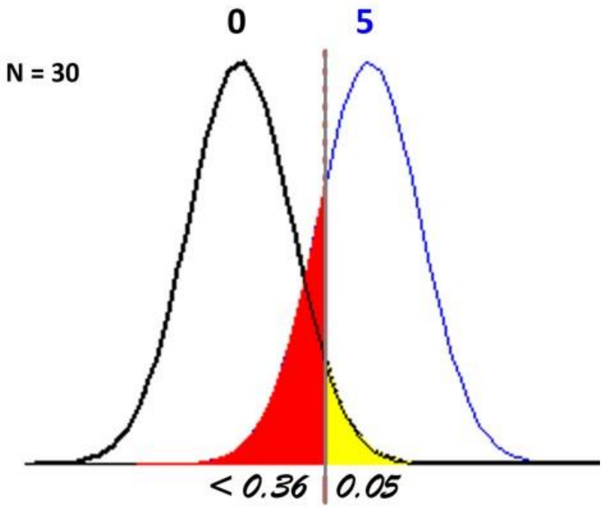


La potenza di un test si calcola con **(1 – β)**. Rappresenta la probabilità di rifiutare H_0 quando essa è effettivamente falsa (ovvero è la capacità del test di non commettere un **errore del secondo tipo**).

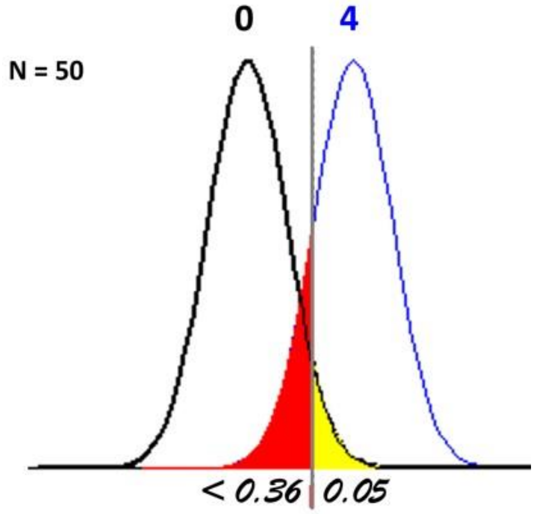
β è complessa da calcolare ma ha delle proprietà. In particolare, dipende da **α**, dalla dimensione campionaria **n** e dalla distanza del parametro VERO della popolazione dal parametro assunto sotto H_0.

β diminuisce quando:

1) Il valore del parametro VERO si <u>allontana</u> da quello ipotizzato in H_0 (c'è meno sovrapposizione).



2) La dimensione campionaria **n** aumenta. (Le distribuzioni si “snelliscono”).



3) La probabilità di commettere un errore del primo tipo, **α**, aumenta. Aumentando α, si riduce l’area di protezione dell’ipotesi nulla (1- α), con conseguente diminuzione della probabilità di un errore di secondo tipo e quindi aumento della potenza del test (1- β).