Corso di GEOMETRIA
Seconda prova di esonero A.A. 2019/2020 - 18 dicembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola
BEORCHIA	VALENTINA		

(1) Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

- (7 punti) Se $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}'$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = M$.

  Si determini, inoltre, la dimensione del nucleo $\ker f \subset \mathbb{R}^3$ e una sua base ortonormale.

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \ker f = 3 - \operatorname{rg} M = 3 - 2 = 1$

eq. di ker f: $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o equiv. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3/2\, y + z = 0 \end{cases}$, $\ker f = \begin{pmatrix} -1/3\, t \\ -2/3\, t \\ t \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14}$, base ortonormale: $\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} \right\}$

- (3 punti) Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $3x + z = 0$. Si determini la dimensione del sottospazio $f(H) \subseteq \mathbb{R}^2$ e una sua base.

eq. parametriche di H: $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$, $f(H) = f\left(\begin{pmatrix} -1/3\, t \\ s \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2/3\, t - s \\ 2/3\, t + s \end{pmatrix}$

$= \left\{ t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow \dim f(H) = 1$ con base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- (3 punti) Si trovi un' equazione cartesiana di un piano vettoriale $L \subset \mathbb{R}^3$ tale che $f(L) = \mathbb{R}^2$.

Ad esempio se L è il piano $z = 0$, con eq. parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$

$f(L) = f\left(\begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2t - s \\ t + s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(L) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$ perché $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linearmente indipendenti

- (7 punti) Si calcoli la matrice $A = M \cdot {}^tM$ e si determini lo spettro di A.

${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = M \cdot {}^tM = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix} =$

$= (5-x)(3-x) - 1 = x^2 - 8x + 14$

$Sp(A) = \{4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}\}$

(2) • (6 punti) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiane per la retta di $\mathbb{A}^3$ passante per il punto $P = (1, 2, -1)$ e ortogonale al piano H di equazione $x - 2y + 4z = 5$.

$r \perp a\ H \Leftrightarrow r$ ha giacitura $W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)$, perché $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ è un vettore normale al piano H.

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad \text{perché } P \in r.$$

Eq. cartesiane: $1 = rg\begin{pmatrix}1 & x-1 \\ -2 & y-2 \\ 4 & z+1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & x-1 \\ 0 & y-2+2x-2 \\ 0 & z+1-4x+4\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -4x + z = -5 \end{cases} \quad \text{eq. cartesiane di } r$$

• (6 punti) Si determinino le posizioni reciproche delle rette

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Oss. che $r \cap r' = \emptyset$, $r \cap r'' = \emptyset$, $r' \cap r'' = \emptyset$ direttamente dalle equazioni; inoltre le giaciture

$r: W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $r': W' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $r'': W'' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ non sono parallele, a due a due.

$\Rightarrow r, r'$ e r'' sono a 2 a 2 sghembe.

• (2 punti) Esistono rette incidenti tutte e tre le rette r, r' e r''? Quante sono? Si giustifichi la risposta senza fare conti.

Date 2 rette sghembe r, r', $\forall$ punto $P \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $P \notin$ rette, $\exists!$ retta s per P e incidente le 2 rette: $s = \text{piano}(P, r) \cap \text{piano}(P, r')$

Abbiamo ora 3 rette sghembe:

$\forall P \in r''$, $\exists\ s$: $P \in s$, $s \cap r' \neq \emptyset$, $s \cap r \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ infinite rette s : $s \cap r \neq \emptyset$, $s \cap r' \neq \emptyset$, $s \cap r'' \neq \emptyset$.

Corso di GEOMETRIA
Seconda prova di esonero A.A. 2019/2020 - 18 dicembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola

(1) Si consideri l'applicazione lineare

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y+z\end{pmatrix}$$

- (7 punti) Se $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}'$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = M$. Si determini, inoltre, la dimensione del nucleo $\ker f \subset \mathbb{R}^3$ e una sua base ortonormale.

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \ker f = 3 - \operatorname{rg} M = 3-2=1$

eq. di $\ker f$: $\begin{cases} x-y=0 \\ 3y+z=0\end{cases}$, $\ker f = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1\end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$\left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{11}$, base ortonormale $\left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{11}\\-1/\sqrt{11}\\3/\sqrt{11}\end{pmatrix}\right\}$

- (3 punti) Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $3x+z=0$. Si determini la dimensione del sottospazio $f(H) \subseteq \mathbb{R}^2$ e una sua base.

eq. parametriche di H: $\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=-3t\end{cases}$, $f(H) = \left\{ f\left(\begin{pmatrix}t\\s\\-3t\end{pmatrix}\right)\right\} = \left\{\begin{pmatrix}t-s\\s-t\end{pmatrix}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow \dim f(H) = 1$ con base $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

- (3 punti) Si trovi un' equazione cartesiana di un piano vettoriale $L \subset \mathbb{R}^3$ tale che $f(L) = \mathbb{R}^2$.

Ad esempio $L: z=0$ verifica:

eq. parametriche di L: $\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=0\end{cases}$ $f(L) = \left\{f\begin{pmatrix}t\\s\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}t-s\\2t+s\end{pmatrix}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$

- (7 punti) Si calcoli la matrice $B = M \cdot {}^tM$ e si determini il suo spettro.

${}^tM = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = M \cdot {}^tM = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}$, $p_B(x) = \det\begin{pmatrix}2-x & 1\\ 1 & 6-x\end{pmatrix}$

$= (2-x)(6-x)-1$

$= x^2-8x+11$

$Sp(B) = \{4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}\}$

(2) • (6 punti) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiane per la retta di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $P = (1, 0, -1)$ e ortogonale al piano H di equazione $x + 2y - 3z = 2$.

$r \perp H \Leftrightarrow r$ ha giacitura $W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$ perché $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ è un vettore normale a H.

$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ perché $P \in r$

Eq. cartesiane: $1 = rg\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 2 & y \\ -3 & z+1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & y-2x+2 \\ 0 & z+1+3x-3 \end{pmatrix}$, $r: \begin{cases} -2x + y = -2 \\ 3x + z = 2 \end{cases}$

• (6 punti) Si determinino le posizioni reciproche delle rette

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r'': \begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Direttamente dalle equazioni oss. che $r \cap r' = \emptyset$, $r \cap r'' = \emptyset$, $r' \cap r'' = \emptyset$

Inoltre le giaciture:

$r: W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $r': W' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $r'': W'' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ a 2 a 2, non sono parallele

$\Rightarrow$ sono a 2 a 2 sghembe

• (2 punti) Esistono rette incidenti tutte e tre le rette r, r' e r'' del punto precedente? Quante sono? Si giustifichi la risposta senza fare conti.

vedi svolgimento compito precedente

Corso di GEOMETRIA
Seconda prova di esonero A.A. 2019/2020 - 18 dicembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola

(1) Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y+2z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

- (7 punti) Se $\mathcal{E}$ é la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}'$ é la base canonica di $\mathbb{R}^2$, si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = M$. Si determini, inoltre, la dimensione del nucleo $\ker f \subset \mathbb{R}^3$ e una sua base ortonormale.

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$rg\, M = rg \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \dim \ker f = 3 - rg\, M = 3-2 = 1$

eq. di $\ker f$: $\begin{cases} x-y-z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$, $\ker f = \left\{\begin{pmatrix}-t\\-2t\\t\end{pmatrix}\right\} = Span\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6}$, base ortonormale $\left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\}$

- (3 punti) Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $x+z=0$. Si determini la dimensione del sottospazio $f(H) \subseteq \mathbb{R}^2$ e una sua base.

eq. parametriche di H: $\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=-t \end{cases}$, $f(H) = \left\{f\begin{pmatrix}t\\s\\-t\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}s-2t\\2t-s\end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{t\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} = Span\left(\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$= Span\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\dim f(H) = 1$ con base $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

- (3 punti) Si trovi un' equazione cartesiana di un piano vettoriale $L \subset \mathbb{R}^3$ tale che $f(L) = \mathbb{R}^2$.

Ad esempio il piano L di equazione $z=0$ e eq. parametriche $\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=0 \end{cases}$

verifica: $f(L) = \left\{f\left(\begin{pmatrix}t\\s\\0\end{pmatrix}\right)\right\} = \left\{\begin{pmatrix}s\\t-s\end{pmatrix}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} = Span\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$= \mathbb{R}^2$ perché $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti

- (7 punti) Si calcoli la matrice $C = M \cdot {}^tM$ e si determini lo spettro di ~~A~~ C

${}^tM = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C = M \cdot {}^tM = \begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, $p_C(x) = \det\begin{pmatrix}5-x & -3\\ -3 & 3-x\end{pmatrix}$

$= (5-x)(3-x) - 9 =$

$= x^2 - 8x + 6$

$Sp(C) = \{4-\sqrt{10}, 4+\sqrt{10}\}$

(2) • (6 punti) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiane per la retta di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $P = (0, 2, -1)$ e ortogonale al piano H di equazione $3x - 2y + 4z = 1$.

$r \perp H \iff r$ ha giacitura $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right)$ perché il vettore $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ è normale ad H.

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad \text{perché } P \in r.$$

Eq. cartesiane di r: $1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}3 & x \\ -2 & y-2 \\ 4 & z+1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}3 & x \\ 0 & y-2+\frac{2}{3}x \\ 0 & z+1-\frac{4}{3}x\end{pmatrix}$

$$r : \begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2 \\ -\frac{4}{3}x + z = -1 \end{cases} \qquad \left(\text{equiv.} \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -4x + 3z = -3 \end{cases}\right)$$

• (6 punti) Si determinino le posizioni reciproche delle rette

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Direttamente dalle equazioni oss. che $r \cap r' = \emptyset$, $r' \cap r'' = \emptyset$, $r \cap r'' = \emptyset$

Inoltre le giaciture:

r: $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, r': $W' = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, r'': $W'' = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ a 2 a 2 non sono parallele

$\Rightarrow$ sono a 2 a 2 sghembe

• (2 punti) Esistono rette incidenti tutte e tre le rette r, r' e r''? Quante sono? Si giustifichi la risposta senza fare conti.

Vedi svolgimento compito precedente.