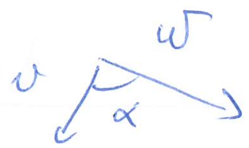
PRODOTTI SCALARI

La nozione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale sta alla base di tutti i concetti di carattere metrico: lunghezza, angolo, distanza, ortogonalità. Si lavora su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Esempi fondamentali

i) Prodotto scalare canonico (o standard) in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$ in generale.

La seguente formula è usata in geometria elementare e in fisica:



$$\langle v,w\rangle = |v||w|\cos\alpha$$

prodotto scalare — lunghezze dei vettori — angolo di v e w

> La relazione fra le 2 espressioni in geometria analitica è data dal teorema del coseno

Altro modo per introdurlo:

se $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

$$\langle v,w\rangle = x_1y_1+x_2y_2 = {}^t v\, w = (x_1, x_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

prod. righe per colonne

Questo si può estendere a $\mathbb{R}^n$:

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \qquad \langle v,w\rangle = {}^t v\, w = x_1y_1+\dots+x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

2) prodotto scalare canonico (o standard) su $\mathbb{C}^n$

$v, w \in \mathbb{C}^n$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\langle v, w \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum \bar{x}_i y_i$$

dove $\bar{x}_i$ denota il coniugato di x_i.

Ponendo $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$, si ha $\langle v, w \rangle = {}^t\bar{v}\, w$.

Ricordiamo che il coniugio è un'applicazione

$J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineare ma <u>antilineare</u> su $\mathbb{C}$.

$$z \longrightarrow \bar{z}$$
$$z_1 + z_2 \longrightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\lambda z \longrightarrow \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z}$$

Se denoto $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ il coniugio, osservo che

$J(z_1 + z_2) = J(z_1) + J(z_2)$ conserva la somma

$J(\lambda z) = \bar{\lambda} J(z)$ non conserva il prodotto per uno scalare di $\mathbb{C}$.

<u>Definizione</u> di prodotto scalare (in generale)

Sia V un K-spazio vettoriale, con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Un prodotto scalare su V è un'applicazione

$$\langle \, , \, \rangle : V \times V \longrightarrow K$$
$$(v, w) \longrightarrow \langle v, w \rangle \in K$$

tale che

Altra notazione $b : V \times V \to K$

1) se $K = \mathbb{R}$:

a) è <u>bilineare</u> cioè $\forall\, v, v', w, w' \in V$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\langle v, \lambda w + \lambda' w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \lambda' \langle v, w' \rangle;$$

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \lambda' \langle v', w \rangle;$$

b) è <u>simmetrica</u> cioè $\forall\, v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle;$$

c) è <u>definita positiva</u>, cioè $\forall\, v \in V$

$\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

Dunque il prodotto scalare nel caso reale è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Oss. che dalla bilinearità segue che
$\langle v, 0 \rangle = 0 = \langle 0, v \rangle \quad \forall\, v \in V$.

2) se $K = \mathbb{C}$:

a) è <u>sesquilineare</u> cioè $\forall\, v, v', w, w' \in V$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$

$$\langle v, \lambda w + \lambda' w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \lambda' \langle v, w' \rangle$$

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\lambda}' \langle v', w \rangle$$

è lineare nel secondo argomento e antilineare nel primo;

b) è hermitiana cioè $\forall\, v, w \in V$

$$\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle};$$

osserviamo che di conseguenza $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$ e perciò $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}\ \forall v$.

c) è definita positiva, ossia $\forall\, v \in V$

$\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

Questo ha senso perché $\langle v, v \rangle$ è reale.

Come nel caso reale, dalla sesquilinearità segue che $\langle v, 0 \rangle = 0 = \langle 0, v \rangle$.

<u>Osservazione</u> La linearità nel secondo argomento + proprietà hermitiana sono sufficienti a provare la sesquilinearità nel primo argomento:

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w \rangle = \overline{\langle w, \lambda v + \lambda' v' \rangle} = \overline{\lambda \langle w, v \rangle + \lambda' \langle w, v' \rangle} =$$

$$= \bar{\lambda}\, \overline{\langle w, v \rangle} + \bar{\lambda}'\, \overline{\langle w', v' \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\lambda}' \langle v', w' \rangle.$$

— · —

Dunque il prodotto scalare di due vettori è un <u>numero reale o complesso</u>.

Il caso reale è caso particolare di quello complesso.

Def. Spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dotato di un prodotto scalare. Analogamente, spazio vettoriale unitario è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dotato di un prodotto scalare.

Esercizio I prodotti scalari canonici su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ sono prodotti scalari secondo la defin.

Rappresentazione matriciale

Le forme bilineari, su $\mathbb{R}$, e quelle sesquilineari, su $\mathbb{C}$, si possono rappresentare mediante matrici, una volta fissata una base.

Sia $b: V \times V \longrightarrow K$ una tale forma, con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Sia $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V.

Def. matrice di b rispetto alla base B è la matrice $n \times n$ $M_B(b) = \left(b(v_i, v_j) \right)_{i,j=1,\dots,n}$:

al posto d'indici i,j c'è $b(v_i, v_j)$.

$\forall$ se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$,

$w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$,

si ha nel caso complesso (quello reale è caso partic.)

$$b(v,w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i , \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \overset{\text{sesquilinearità}}{=}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i y_j b(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i, v_j) y_j .$$

Siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i vettori colonna delle coordinate di v e w rispetto alla base B.

Si ha: $\quad {}^t\bar{x} M_B(b) y = \underbrace{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}_{1\times n} \underbrace{M_B(b)}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} =$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i, v_1), \dots, \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i, v_n)\right)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i, v_j) y_j = b(v,w).$$

> Dunque $\quad b(v,w) = {}^t\bar{x} M_B(b) y$,
> dove x, y sono ~~le~~ vettori colonna delle coordinate di v e w rispetto a B.

Se $K = \mathbb{R}$ si ottiene $b(v,w) = {}^t x M_B(b) y$.

Se la forma considerata b è simmetrica reale (risp. hermitiana complessa), la matrice $M_B(b)$ gode di particolari proprietà.

Ricordiamo che una matrice quadrata A è detta simmetrica se ${}^tA = A$.

<u>Def.</u> Una matrice quadrata complessa si dice <u>hermitiana</u> se ${}^t\bar{A} = A$ o, equivalentemente, ${}^tA = \bar{A}$ (dove $\bar{A}$ denota la matrice dei coniugati degli elementi di A).

<u>Esempi</u>

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ è hermitiana, $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & i \end{pmatrix}$ è simmetrica non hermitiana, $\begin{pmatrix} 2 & i+1 & 7-i \\ 1-i & 1 & 0 \\ 7+i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è hermitiana.

<u>Prop.</u> Se b è una forma bilineare simmetrica, $M_B(b)$ è simmetrica. Se b è sesquilineare hermitiana, $M_B(b)$ è hermitiana.

<u>Dim.</u> Nel primo caso $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$, nel secondo $b(v_i, v_j) = \overline{b(v_j, v_i)}$.

Ogni matrice simmetrica reale (risp. hermitiana complessa) induce una forma bilineare simmetrica (risp. sesquilineare hermitiana).

Infatti:

<u>Prop.</u> Sia A una matrice quadrata.

1) ~~Se~~ A è simmetrica reale se e solo se
$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ data } b(x,y) = {}^t x A y$$
è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^n$.

2) A è hermitiana complessa se e solo se
$$b : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che } b(x,y) = {}^t \overline{x} A y$$
è una forma sesquilin. hermitiana.

<u>Dim.</u> Caso 2) (il caso 1) si può vedere come caso particolare). Un'implicazione è stata già fatta.

Sia A matrice hermitiana, verifichiamo che b è sesquil. hermitiana.

- 2° argomento: linearità

$$b(x, \lambda y + \mu y') = {}^t \overline{x} A (\lambda y + \mu y') \overset{\text{prop. distrib.}}{=}$$
$$= {}^t \overline{x} A (\lambda y) + {}^t \overline{x} A (\mu y') \overset{\text{prop. prod. di matrici}}{=}$$
$$= \lambda ({}^t \overline{x} A y) + \mu ({}^t \overline{x} A y') =$$
$$= \lambda\, b(x,y) + \mu\, b(x,y').$$

- 1° argomento

$$b(\lambda x+\mu x', y) = {}^t\overline{(\lambda x+\mu x')}\, A y \underset{\text{coniugio}}{\overset{\text{prop.}}{=}}$$

$$= {}^t(\bar\lambda \bar x + \bar\mu \bar x')\, A y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. distrib.}}}{=} \bar\lambda\, {}^t\bar x A y + \bar\mu\, {}^t\bar x' A y =$$

$$= \bar\lambda\, b(x,y) + \bar\mu\, b(x',y)$$

- hermitiana

$$b(y,x) = {}^t\bar y A x \underset{\substack{\downarrow \\ \text{matrice } 1\times 1 \text{ coincide} \\ \text{con la sua trasposta}}}{=} {}^t({}^t\bar y A x) = {}^t x\, {}^tA\, \bar y \underset{\substack{\downarrow \\ \bar{\bar z} = z}}{=}$$

$$= \overline{{}^t\bar x\, {}^t\bar A\, y} \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ è herm.}}}{=} \overline{{}^t\bar x A y} = \overline{b(x,y)}\,.$$

<u>Oss.</u> Se B, A sono matrici t.c. ${}^t\bar x B y = {}^t\bar x A y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$, allora $B = A$.

<u>Dim.</u> Sia $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonica.

Allora
$$\begin{array}{c} {}^t\bar e_i B e_j = b_{ij} \\ \shortparallel \\ {}^t\bar e_i A e_j = a_{ij} \end{array}.$$

Si ha dunque biezione tra matrici simm. (o herm.) e forme bilin. simm. (o sesq. herm.) su $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Analogo su V se è fissata una base.

Esempi

1) Se $\mathcal{B}$ è la base canonica (di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) e b il prodotto scalare standard:

$b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ e dunque $M_{\mathcal{B}}(b) = E_n$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ simmetrica reale.

La forma bilineare corrisp. risp. a $\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^3$ è t.c. $b(e_1, e_1) = 2$, $b(e_1, e_2) = 1 = b(e_2, e_1)$,

$b(e_1, e_3) = 0 = b(e_3, e_1)$, $b(e_2, e_2) = 1$,

$b(e_2, e_3) = 0 = b(e_3, e_2)$, $b(e_3, e_3) = 3$.

$$b(x,y) = b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \, b(e_i, e_j) =$$

$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 \ ;$$

per vedere se è un prodotto scalare consideriamo

$$b((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 3x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 3x_3^2 \ : \ \text{è} \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

È $= 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow b$ è un prodotto scalare.

3) Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; definisce

$$\langle x, y\rangle = {}^t x S y = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$\iff (x_1, x_2, x_3) \in \langle (1,-1,0) \rangle$
sottospazio generato da $(1,-1,0)$.

Non è definito positivo, non è un prod. scalare.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B definisce

$$b(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$$

$b(x, x) = 2x_1x_2 + x_3^2$: non è sempre ≥ 0

infatti per esempio $b(e_1, e_1) = 0$
$b((1,-1,0),(1,-1,0)) = -2$.

Non è def. pos.

5) $V = \mathbb{R}[t]$ polinomi a coeff. reali, $p, q \in V$.

$\langle p, q\rangle \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$: è un prodotto scalare su V.

6) Sia $V = M(m \times n, \mathbb{R})$.

Def. $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$b(A, B) = tr({}^tB A)$ traccia del prodotto.

Verif. che è bilineare simm. (esercizio)

$b(A, A) = tr({}^tA A)$

Al posto d'indici ii ${}^tAA$ ha $(a_{1i} \cdots a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} =$

$= a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2$.

Dunque $b(A, A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$: è la somma dei quadrati di tutti gli elementi di A. Dunque b è un prodotto scalare.

Sia V un K-spazio vettoriale, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Def. un'applicazione $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$
$v \longrightarrow \|v\|$

è una <u>norma</u> su V se:

1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, $\forall \lambda \in K$, $v \in V$ valore assoluto o modulo
2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ disuguaglianza triangolare
3) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

<u>Oss.</u> Dalla def. segue subito che $\|v\| \geq 0$

$\forall$ vettore v.

Infatti $\|v-v\| = \|0\| = 0$ per la 3).

Ma $0 = \|v-v\| \underset{\text{per la 2)}}{\leq} \|v\| + \|-v\| \underset{\text{per la 1)}}{=} \|v\| + |-1|\,\|v\| =$

$= 2\|v\| \implies \|v\| \geq 0$.

Esempi in $\mathbb{R}^n$

1) norma euclidea

$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

dim. poi che è una norma

2) norma 1:

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

somma dei valori assoluti.

Per dim. che è una norma, si usa che $|x+y| \leq |x| + |y|$.

3) norma ∞:

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$ massimo dei valori assoluti

In $\mathbb{C}^n$:

La norma standard:

$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n}$.

Relazione fra prodotto scalare e norma:

a ogni prodotto scalare si può associare una norma ma non tutte le norme vengono da un prodotto scalare (solo se vale la legge del parallelogramma, si vedrà in Analisi).

$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 = 2\|v\|^2+2\|w\|^2$$

Prop. Sia $\langle \, , \rangle$ un prodotto scalare su V, su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Allora $\|v\| \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle v,v\rangle}$ è una norma su V.

Dim.

1) e 3) sono facili, vediamo la 1) nel caso complesso.

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}\lambda\langle v,v\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle v,v\rangle} =$$

$$\overset{|\lambda| \text{ è } \geq 0}{=} |\lambda| \sqrt{\langle v,v\rangle} = |\lambda| \, \|v\| .$$

Per dim. la 2) serve il seguente teorema.

Teorema (disuguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ)

Sia $\langle \, , \rangle$ un prodotto scalare su V.

Allora $\forall v,w \in V$ si ha:

$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\| .$$

- valore assoluto su $\mathbb{R}$
- modulo su $\mathbb{C}$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se v, w sono linearmente dipendenti.

Dim. caso complesso (quello reale è un caso particolare di questo).

- Se $w = 0$: $|\underbrace{\langle v, 0\rangle}_{=0}| \leq \|v\|\,\|0\| = 0$:

  è vero con uguaglianza.

- Sia $w \neq 0$. Consideriamo $\lambda := \dfrac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\underbrace{\langle w, w\rangle}_{\neq 0}}$.

  Si ha:

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \underset{\text{sesquilinearità}}{=} \langle v, v\rangle - \lambda \langle v, w\rangle -$$

$$- \bar{\lambda} \langle w, v\rangle + \bar{\lambda}\lambda \langle w, w\rangle = \text{ sostituisco il valore di } \lambda$$

$$= \langle v, v\rangle - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle} \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\underbrace{\langle w, w\rangle}_{\langle w,w\rangle \in \mathbb{R}}} \underbrace{\overline{\langle v, w\rangle}}_{\text{prod. scal. è hermitiano}} +$$

$$+ \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\cancel{\langle w, w\rangle}} \cancel{\langle w, w\rangle} \underset{\text{ultimi termini si cancellano}}{=} \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

Moltiplico per $\|w\|^2$ che è > 0 :

$$0 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2 \quad \text{ossia}$$

$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$ Estraggo le radici:

$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|.$

Vale l'uguaglianza se e solo se

$\langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle = 0 \iff v-\lambda w = 0$

$\iff v,w$ sono lin. dipendenti. ■

Ora dim. della 2) della norma, disug. triang.:

$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle +$

$+ \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \|w\|^2 =$

$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \leq$ (*)

$\leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \leq$ Cauchy-Schwarz

$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 =$

$= (\|v\| + \|w\|)^2$ da cui la tesi.

(*) Abbiamo usato che se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, allora $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$. Infatti:

$\mathrm{Re}(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|.$

Vale l' = sse z è reale e positivo ($a=|a|$ e $b=0$).

Dunque $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$ sse v, w sono lin. dip. con $\langle v,w\rangle$ reale e >0.

Oss. Una norma è indotta da un solo prodotto scalare, infatti vale la formula di polarizzazione che permette di ricostruire $\langle v, w \rangle$ se si conosce la funzione norma.

Su $\mathbb{R}$: $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$

Su $\mathbb{C}$: $\mathrm{Re}\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

$\mathrm{Im}\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v - iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

Altra formula di polarizzazione su $\mathbb{C}$:

$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v-iw\|^2 - i\|v+iw\|^2\right)$ (esercizio)

Angoli

V spazio vettoriale euclideo reale

Da Cauchy-Schwarz segue:

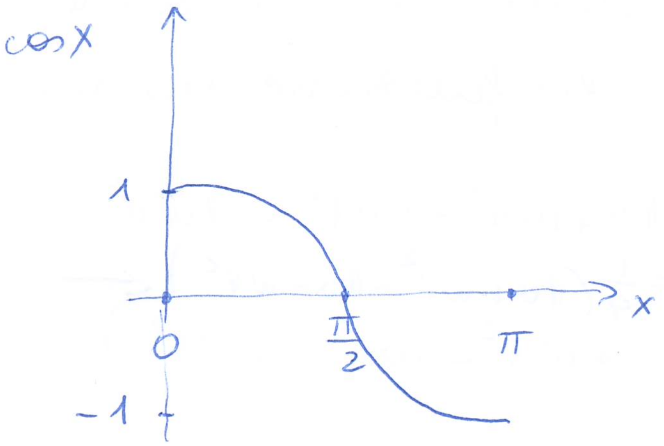
$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$ valore assoluto

$-\|v\|\,\|w\| \leq \langle v, w \rangle \leq \|v\|\,\|w\|$

Se $v \neq 0$ e $w \neq 0$

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1.$$

La funzione coseno è strettamente decrescente, continua, nell'intervallo $[0,\pi]$.



Perciò $\forall\, y \in [-1,1]$ $\exists!\, x \in [0,\pi]$ t.c. $y = \cos x$.

Allora poniamo def. l'angolo di 2 vettori:

<u>Def.</u> siano $v, w \in V$, $v, w \neq 0$

L'<u>angolo convesso</u> di v e w è l'unico $\alpha \in [0,\pi]$ tale che $\cos\alpha = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$.

La def. di angolo ha senso solo nel caso reale.
Nel caso complesso $\langle v,w\rangle \in \mathbb{C}$.

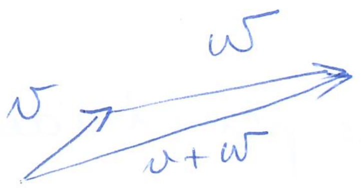
In generale, sia nel caso reale sia nel caso complesso, si dà la definizione di vettori ortogonali.

<u>Def.</u> V sp. vett. euclideo o unitario.
$v, w \in V$ si dicono <u>ortogonali</u> se e solo se $\langle v,w\rangle = 0$ e si scrive $v \perp w$.

Nel caso <u>euclideo</u>, $v, w \neq 0$ sono ortogonali se e solo se l'angolo vale $\frac{\pi}{2}$.

Interpretazione geometrica ed esempi

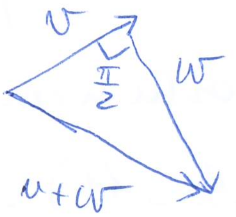
1) Disuguaglianza triangolare:



v, w linearmente indip. sono lati di un triangolo che ha $v+w$ come terzo lato

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ traduce che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.

2)

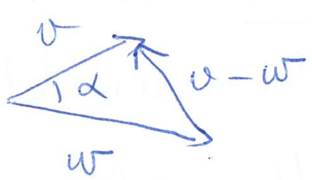


v, w ortogonali: sono i cateti di un triangolo rettangolo, di cui $v+w$ è l'ipotenusa.

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v,v \rangle + 2\underbrace{\langle v,w \rangle}_{0} + \langle w,w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2:$$

è il Teorema di Pitagora.

3)

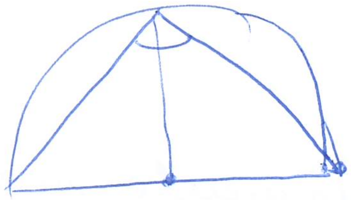


Triangolo qualunque.

$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w \rangle = \langle v,v \rangle - 2\langle v,w \rangle + \langle w,w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cos \alpha.$$

È il teorema del coseno.

4) Teorema di Talete: l'angolo opposto al diametro in un triangolo inscritto in una semicirf è retto.



5) I due teoremi di Euclide per i triangoli rettangoli.

6) Le 3 altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

Queste tre ultime proprietà si possono dimostrare scegliendo opportunamente dei vettori (esercizio 3, foglio 10)

Questi teoremi valgono in tutti gli spazi euclidei.

V spazio vettoriale euclideo o unitario

<u>Def.</u> Siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali.

1) U, W si dicono <u>ortogonali</u> se $\forall u \in U, w \in W$ si ha $\langle u, w\rangle = 0$. Si scrive $U \perp W$.

2) Sia $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale.

$$W^\perp \overset{\text{def.}}{=} \{ v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \forall w \in W \}$$

è detto <u>complemento ortogonale</u> di W.

Oss. $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Infatti $\langle 0, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow 0 \in W^\perp$.

Se $v_1, v_2 \in W^\perp$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ si ha $\forall w \in W$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, w\rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle v_2, w\rangle}_{=0} =$$

$$= 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W^\perp.$$

3) Una famiglia di vettori di V $\{v_i\}_{i\in I}$ si dice <u>ortogonale</u> se $v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$, $i,j \in I$ (a 2 a 2 ortogonali)

4) Una famiglia di vettori di V $\{v_i\}_{i\in I}$ si dice <u>ortonormale</u> se è ortogonale e $\|v_i\| = 1 \quad \forall i \in I$ (norma associata a $\langle\, , \rangle$). Ogni v_i è un <u>versore</u>. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

5) Una <u>base ortonormale</u> di V è una base t.c. è una famiglia ortonormale. Normalizzare $v \neq 0$ significa passare da v a $\frac{v}{\|v\|}$ di norma 1.

<u>Esempi</u> i) Per il prodotto scalare standard, la base canonica è ortonormale.

2) In $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^2$, con prod. scalare standard, $v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ formano una base ortonormale.

$(1,1)$ e $(1,-1)$ sono ortogonali, poi normalizzo.

<u>Prop.</u> Sia $\mathcal{B} = (v_1, -, v_n)$ una base <u>ortonormale</u> di V.

Allora ogni vettore di V si scrive

$$v = \langle v_1, v \rangle v_1 + \dots + \langle v_n, v \rangle v_n. \qquad (*)$$

<u>Dim.</u> $\exists\, \lambda_1, -, \lambda_n$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Allora $\langle v_j, v \rangle =$

$$= \langle v_j, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rangle = \lambda_1 \langle v_j, v_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_j, v_n \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ji} = \lambda_j. \quad \blacksquare$$

Questa prop. mostra l'utilità di lavorare con basi ortonormali. Il coeff. di v_i è $\langle v_i, v \rangle = \frac{\cos \vartheta_i}{\|v\|}$, dove ϑ_i è l'angolo tra v e v_i.

Se v è un versore, le coordinate sono i coseni.

<u>Prop.</u> Sia $\{v_i\}_{i \in I}$ una famiglia ortogonale con $v_i \neq 0$ $\forall i$.

Allora:

1) i vettori $\{v_i\}_{i\in I}$ sono lin. indip.

2) $\left\{\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\}_{i\in I}$ è una famiglia ortonormale.

Dim. $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0 \implies$

somma finita cioè i λ_i sono quasi tutti nulli

$$\langle v_j, \sum \lambda_i v_i \rangle = \langle v_j, 0\rangle = 0$$

$$\|$$

$$\sum_i \lambda_i \langle v_j, v_i\rangle = \lambda_j .$$

$= 0$ se $j \neq i$

Perciò $\forall j \in I \;\; \lambda_j = 0$.

2) $$\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v_i\|} \right| \|v_i\| = \frac{1}{\|v_i\|} \|v_i\| = 1 .$$

è >0

Se $i \neq j$ $$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|} \langle v_i, v_j\rangle = 0 .$$

— · —

Basi ortonormali esistono in ogni spazio vettoriale euclideo o unitario di dim finita grazie al seguente teorema di ortonormalizzazione. La dim. si basa sulla nozione di proiezione ortogonale.

V euclideo o unitario

v vettore

ortonormale ?

W sottospazio, $(w_1, \dots, w_m)$ base di W

Proiezione ortogonale di v su W è il

vettore $\tilde{v} = \langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m$.

Espressione come in (*).

In effetti 1) $\tilde{v} \in W$, perché comb. lin. di $w_1, \dots, w_m$;

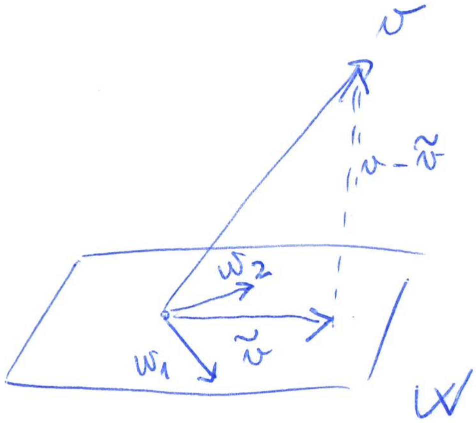
2) $v - \tilde{v}$ è ortogonale a W: infatti

risulta ortog. a ogni w_i

$$\langle w_i, v - \tilde{v}\rangle = \langle w_i, v - \sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v\rangle w_j\rangle =$$

$$= \langle w_i, v\rangle - \langle w_i, \sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v\rangle w_j\rangle =$$

$$= \langle w_i, v\rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v\rangle \underbrace{\langle w_i, w_j\rangle}_{\substack{0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j}} = 0$$



Teorema: Algoritmo di ortonormalizzazione di GRAM-SCHMIDT.

V spazio vettoriale euclideo o unitario

$W \subseteq V$ sottospazio vettoriale

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Ogni base ortonormale $(w_1, \dots, w_m)$ di W si può prolungare a una base ortonormale di V.

Dim. Induzione su $n-m$, la codimensione di W in V.

Base dell'induzione: $n-m=0$, allora $W=V$ e la tesi è verificata automaticamente.

Passo induttivo: sia $n-m>0$ e supp. vero il teorema per $n-m-1$.

Poiché $n-m>0$, esiste un vettore $v \in V \setminus W$.
Consideriamo allora la sua proiezione ortogonale su W: $\tilde{v} = \langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m$.

Abbiamo che $v - \tilde{v}$ è ortogonale a W, ossia $v-\tilde{v} \in W^\perp$, e $v-\tilde{v} \neq 0$, altrimenti $v-\tilde{v} \in W$, $\tilde{v} \in W \Rightarrow (v-\tilde{v}) + \tilde{v} = v \in W$: assurdo.

Allora possiamo normalizzare $v-\tilde{v}$ e definire

$$w_{m+1} = \frac{v-\tilde{v}}{\|v-\tilde{v}\|}.$$

Otteniamo che $\|w_{m+1}\| = 1$ e $w_{m+1} \perp w_i$ $\forall i = 1, \dots, m$.

Consideriamo allora il sottospazio

$W' := \langle w_1, \dots, w_m, w_{m+1} \rangle$: $w_1, \dots, w_{m+1}$ è una sua base ortonormale; infatti lo generano e sono una famiglia ortonormale.

Allora $\dim V - \dim W' = n-(m+1) = n-m-1$.

Per ip. induttiva posso prolungare $w_1, \dots, w_{m+1}$ a una base ortonormale di V.

In pratica, aggiungiamo un vettore alla volta a W, fino ad arrivare a n vettori.

<u>Oss.</u> Se ho una forma bilineare simmetrica, non necessariam. def. pos., con lo stesso ragionamento si prova che c'è una base ortogonale (non nec. ortonormale).

__Corollario__ Ogni spazio vettoriale euclideo o unitario ha una base ortonormale.

Se $V = \{0\}$, base $\emptyset$.

Se $V \neq \{0\}$, c'è $v \neq 0$, lo normalizzo

$\frac{v}{\|v\|} = w_1$ e applico il teorema a

$W = \langle w_1 \rangle$.

__Osservazione importante__

Il prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle$ espresso rispetto a una base ortonormale assume la forma del prodotto scalare standard.

$B = (v_1, \dots, v_n)$ ortonormale

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordinate risp. a B

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum x_i v_i , \sum y_j v_j \rangle =$$
$$= \sum \bar{x}_i y_j \underbrace{\langle v_i , v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = {}^t\bar{x} y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n.$$

La matrice $M_B(\langle \, , \, \rangle) = E_n$ se B è ortonormale.

Def. V è somma ortogonale di suoi sottospazi vettoriali $V_1, \dots, V_k$, e si ~~[illegible]~~ scrive $V = V_1 \oplus\!\!\!\!\perp V_2 \oplus\!\!\!\!\perp \dots \oplus\!\!\!\!\perp V_k$, se

1) $V = V_1 + \dots + V_k$
2) $V_i \perp V_j \quad \forall i \neq j$.

Oss. che una somma ortogonale è diretta perché $V_i \perp \sum_{j \neq i} V_j$, e quindi $V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j\right) = \{0\}$.

Prop. V sp. vett. euclideo o unitario. Sia $W \subseteq V$ un sottosp. vett., $\dim V = n$.

Allora $V = W \oplus\!\!\!\!\perp W^\perp$. In particolare

$$\boxed{\dim V = \dim W + \dim W^\perp}.$$

Dim. Sia $w_1, \dots, w_m$ una base ortonormale di W, la prolungo a una base ortonormale di V, con Gram-Schmidt: $(w_1 \dots w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$.

$\forall v \in V$
$$v = \underbrace{\langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m}_{\in W} + \underbrace{\langle v_{m+1}, v\rangle v_{m+1} + \dots + \langle v_n, v\rangle v_n}_{\in W^\perp}$$
$\in W^\perp$ perché la base è ortonorm.

Allora $V = W + W^\perp$, ma $W \perp W^\perp \Rightarrow$ la somma è ortogonale.

Oss. in partic. che $v_{m+1}, \dots, v_n$ sono base di $W^\perp$.