Endomorfismi ortogonali e unitari.

Sono quelli che conservano la struttura metrica ossia il prodotto scalare.

Def - V sp. vett. euclideo (o unitario) $f : V \longrightarrow V$ endomorfismo si dice **ortogonale** (risp. **unitario**) se $\forall v, w \in V$

$<v, w> = <f(v), f(w)>$: f conserva il prodotto scalare.

Chiaramente in questo caso $<v, v> = <f(v), f(v)>$

e perciò $\|v\| = \|f(v)\|$: **f conserva la norma** indotta dal prodotto scalare.

Questa proprietà si può rovesciare:

Prop - Sia V uno sp. vett. euclideo (unit.)

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo t.c.

$\|f(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.

Allora f è ortogonale (risp. unitario)

Dim Basta usare la formula di polarizzazione, nei 2 casi reale e complesso. ∎

Osserviamo che un endomorfismo ortogonale (o unitario) è sicuramente iniettivo. Infatti se $v \in \operatorname{Ker} f$, si ha $f(v) = 0$ e perciò $\|f(v)\| = 0$; ma $\|v\| = \|f(v)\|$ e quindi $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

Allora se dim V è finita un endom. ortogonale (unitario) è un automorfismo di V, cioè un isomorfismo di V in sè.

Un tale endom. è anche detto isometria vettoriale o lineare.

Prop: autovalori di un endomorfismo ortogonale o unitario.

Sia λ un autovalore di $f : V \longrightarrow V$ ortogonale o unitario.

Allora $|\lambda| = 1$ (valore assoluto o modulo).

Dim. Per ip. $\exists\, v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

Allora $\underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ ortog.} \\ \text{o unit.}}}{\|v\| =} \underset{\substack{\downarrow \\ v \text{ autovett.}}}{\|f(v)\| =} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{prop.} \\ \text{norma}}}{\|\lambda v\| =} |\lambda|\,\|v\|$.

Allora $|\lambda| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$.

Nel caso reale si ha $\lambda = \pm 1$;

nel caso complesso, λ appartiene alla circf unitaria: $\lambda = e^{i\alpha}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

$= \cos\alpha + i \sin\alpha$

Quindi nessun autovalore è nullo.

Altra prop. importante:

Prop. Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori distinti di f, ortogonale o unitario. Siano v autovettore di λ e w autovettore di μ.

Allora $v \perp w$. Ossia: autovettori di autovalori distinti sono ortogonali (non solo lin. indip.)

Dim. $f(v) = \lambda v$, $f(w) = \mu w$.

$$\langle v, w \rangle \underset{\substack{f \text{ ortog. o} \\ \text{unit.}}}{=} \langle f(v), f(w) \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle \underset{\text{sesq.}}{=}$$

$= \bar{\lambda}\mu \langle v, w \rangle$. Allora $(1 - \bar{\lambda}\mu)\langle v, w \rangle = 0$.

Ci sono 2 casi:

o $\langle v, w \rangle = 0$ e v, w sono ortogonali;

opp. $1 = \bar{\lambda}\mu$. Ma $|\lambda| = 1$ e perciò $\bar{\lambda}\lambda = 1$ e dunque $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Allora

$1 = \bar{\lambda}\mu = \frac{\mu}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \mu$: assurdo.

(Nel caso reale la dim. è più semplice in quanto la relaz. è $\lambda\mu = 1$ da cui $\mu = \frac{1}{\lambda}$; ma λ, μ valgono entrambi 1 o -1 e quindi sono uguali).

Più in generale: se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di f allora

$$Aut(\lambda_1) \oplus^{\perp} Aut(\lambda_2) \oplus^{\perp} \dots \oplus^{\perp} Aut(\lambda_k) \subseteq V$$

è una somma ortogonale, perchè ogni autovett. di λ_i è ortog. ad ogni somma di autovettori degli altri autovalori.

Matrici associate a endom. ortogonali (unitari). Interessa il caso in cui si lavora con una base ortonormale.

<u>Def</u>. A matrice $n \times n$ reale, <u>invertibile</u>

A è detta <u>ortogonale</u> se $A^{-1} = {}^tA$.

A matrice $n \times n$ complessa, invertibile.

A è detta <u>unitaria</u> se $A^{-1} = {}^t\bar{A}$.

<u>Prop.</u> A matrice quadrata reale (o complessa)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) A è ortogonale (risp. unitaria);

(ii) le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$) ~~per~~ il prod. scalare standard;

(iii) stessa proprietà per le righe di A.

<u>Dim.</u> nel caso complesso.

A unitaria $\iff {}^t\bar{A}A = E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \iff$

~~cioè~~

${}^t\bar{a}^i a^j = \delta_{ij}$ ma questo è proprio $\langle \bar{a}^i, a^j \rangle$ prod. scal. standard

colonna i-esima di $\bar{A}$

colonna j-esima di A

e dunque le colonne a^j formano una base ortonorm. di $\mathbb{C}^n$.

<u>Per le righe</u>, si usa che $A\,{}^t\bar{A} = E_n \overset{\text{coniugo}}{\iff} \bar{A}\,{}^tA = E_n$ e si ragiona come sopra, lavorando con la trasposta di A.

Esempi

1) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ matrice della rotazione di angolo α in $\mathbb{R}^2$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ matrice di una riflessione in $\mathbb{R}^2$

$${}^tBB = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Legame con gli endom. ortogonali e unitari.

<u>Teorema</u> $f: V \to V$ endomorfismo di V sp. vett. euclideo o unitario

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sia una base <u>ortonormale</u>.

Allora f è ortogonale (risp. unitario) $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale (risp. unitaria).

<u>Dim</u> caso complesso.

Siano v, w vettori con colonne delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ rispettivamente $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

- $\mathcal{B}$ è ortonormale $\Rightarrow \langle v, w\rangle = {}^t\bar{x}\,y$.
- $f(v)$ ha coordinate Ax rispetto a $\mathcal{B}$
  $f(w)$ " " Ay

f è unitario $\Longleftrightarrow \langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$
$\forall v, w \in V$

$\Longleftrightarrow {}^t\bar{x}\,y = {}^t(\overline{Ax})\,Ay \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

Osservazione che se 2 matrici inducono la stessa forma coincidono $\Longleftrightarrow {}^t\bar{x}\,E_n\,y = {}^t\bar{x}\,{}^t\bar{A}\,A\,y$

$\Longleftrightarrow \bar{E}_n = {}^t\bar{A}A$, ossia ${}^t\bar{A} = \bar{A}^{-1}$.

Cor: se A, ortogonale, è interpretata come matrice di un cambiamento di base, e ~~ude~~ la prima base è ortonormale, lo è anche la nuova base.

Caso particolare: $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{C}$ base canonica e prod. scalare canonico

A è ortogonale $\Longleftrightarrow L(A)$ è ortogonale.

$\mathbb{C}^n$ con $\mathcal{C}$ base canonica e prod. scalare canonico

A è unitaria $\Longleftrightarrow L(A)$ è endom. unitario.

Infatti $\mathcal{C}$ è base ortonormale per il prod. scalare standard e $A = M_{\mathcal{C}}(L(A))$.

Quindi: rotazioni e riflessioni sono endomorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^2$.

GRUPPI DI MATRICI.

Supp. A, B siano matrici ortogonali $n\times n$, cioè ${}^tAA = E_n = {}^tBB$. Allora

${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBE_nB = {}^tBB = E_n$

$\Rightarrow AB$ è ortogonale.

Anche: E_n è ortogonale, le colonne sono $e_1, \dots, e_n$.

Se A è ortogonale ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t(A^{-1})\,{}^t\!A =$

$= {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = E_n \Rightarrow A^{-1}$ è ortogonale.

Sia $O(n) = \{A \ n\times n$ reale $| A$ ortogonale $\}$

$\cap$

$GL(n, \mathbb{R})$

è un sottogruppo: <u>gruppo ortogonale</u> di grado n.

Analogamente:

A, B unitarie $\Rightarrow {}^t(\overline{AB})AB = {}^t(\overline{A}\,\overline{B})AB =$

$= {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A}AB = E_n$ ecc.

$U(n) = \{A \ n\times n$ complessa $| A$ unitaria $\}$

$\cap$

$GL(n, \mathbb{C})$ gruppo unitario di grado n.

Oss. Se A è una matrice ortogonale o unitaria, $|\det(A)| = 1$ (modulo o valore assoluto).

Dim.
$$\det(A\,{}^t\bar{A}) = \det(E_n) = 1$$
$$\overset{\text{Binet}}{=}\ \det(A)\det({}^t\bar{A}) = (\det A)(\det \bar{A}) \overset{\text{prop. del coniugio}}{=} \det(A)\overline{\det(A)}$$
$$\Rightarrow |\det(A)|^2 = 1 \Rightarrow |\det(A)| = 1.$$

Allora def.: $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$
$= \{A \mid A \text{ ortogonale con } \det(A) = 1\}$

gruppo ortogonale speciale: matrici ortogonali con determinante 1.

$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$

gruppo unitario speciale: matrici unitarie con determinante 1.

Teorema Forma normale per automorfismi unitari (caso complesso)

V sp. vett. unitario di dim finita n, $f: V \to V$ automorfismo unitario.

Allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ ortonormale di V formata da autovettori di f.

In particolare f è diagonalizzabile.

Dim. Induz. su $n = \dim V$.

$n=1$ $V \neq \{0\}$; $\exists v \in V$, $v \neq 0$

Considero $\frac{v}{\|v\|}$: è una base ortonorm. di V

e ogni vettore di V gli è prop., dunque è autovettore.

Passo induttivo siamo su $\mathbb{C}$: $p_f(x)$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$: λ, è autovalore di f $\Rightarrow \exists v_1 \neq 0$ t.c. $f(v_1) = \lambda v_1$. Posso supp. $\|v_1\| = 1$ (altrimenti lo sostituisco con $\frac{v_1}{\|v_1\|}$).

Sia $W = \langle v_1 \rangle^\perp$: vogliamo dim. che $f(W) \subseteq W$, perchè in tal caso $f|_W$ è un endom. unitario di W e possiamo applicare l'ip. induttiva.

Sia dunque $w \in W$: allora $\langle w, v_1 \rangle = 0$.

Consid. $f(w)$ e vogliamo dim. che $\langle f(w), v_1 \rangle = 0$.

Da $\langle w, v_1 \rangle = 0$ segue $\langle f(w), f(v_1) \rangle = 0 =$

$= \langle f(w), \lambda v_1 \rangle = \lambda \langle f(w), v_1 \rangle$:

sappiamo che $|\lambda| = 1$ dunque $\lambda \neq 0$.

Allora $< f(w), v_1 > = 0$ e $f(w) \in W = \langle v_1 \rangle^\perp$.

Consideriamo $f|_W : W \to W$ è unitario,

$\dim W = n-1$ (perché $V = \langle v_1 \rangle \oplus W$)

Allora per ip. induttiva $\exists\, v_2, \ldots, v_n$ base ortonorm. di W formata da autovettori di $f|_W$: sono anche autovettori di f.

Ma $v_i \in W = \langle v_1 \rangle^\perp \Rightarrow \langle v_1, v_i \rangle = 0 \ \forall i \geq 2$.

Si ha che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di V (perché unione di basi dei 2 addendi diretti), ed è ortonormale. ∎

Questo teorema ha una versione per matrici.

<u>Teorema</u> Forma normale per matrici unitarie.

A matrice unitaria $n \times n$.

Allora esiste una matrice S <u>unitaria</u> $n \times n$ t.c. $S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

In particolare A è diagonalizzabile mediante una matrice unitaria.

Dim: A unitaria, $\mathcal{C}$ base canonica di $\mathbb{C}^n$

$L(A): \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è autom. unitario

per il prod. scalare canonico $\Rightarrow \exists$ una

base ortonormale per il prod. scalare canonico di $\mathbb{C}^n$ $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di

autovettori di $L(A)$. Abbiamo allora:

$$\underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n})}_{S^{-1}} \underbrace{M_{\mathcal{C}}(L(A))}_{A} \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{C}^n})}_{S} = M_{\mathcal{B}}(L(A)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

autovalori di $L(A)$

Inoltre le colonne di S sono i vettori di $\mathcal{B}$, base ortonormale per il prodotto scalare standard,
$\Rightarrow S$ è unitaria. ∎

Corollario

Se f è un automorfismo unitario, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti, si ha:

$$V = Aut(\lambda_1) \perp \dots \perp Aut(\lambda_k).$$

Nel caso ortogonale, non è più vero che A sia diagonalizzabile: es.

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ se $\alpha \neq 0, \pi$, matrice di rotazione di angolo α.

Però: se A è una <u>matrice reale ortogonale 2x2</u>
<u>A è di uno dei 2 tipi già visti</u>. Infatti

se $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, A è ortogonale $\iff {}^tAA = E_2$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 & (a,b) \in \text{cf unitaria} \\ ac+bd=0 & \\ c^2+d^2=1 & (c,d) \in \text{cf unitaria} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ esistono unici angoli $0 \le \alpha, \beta < 2\pi$ t.c.

$a = \cos\alpha \quad b = \sin\alpha$

$c = \sin\beta \quad d = \cos\beta$

Ma $ac+bd = 0 = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$
quindi $\alpha+\beta$ è un multiplo intero di π.
$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ perché $0 \le \alpha, \beta < 2\pi$.

<u>1° caso</u>: $\alpha+\beta = 0, 2\pi \Rightarrow \alpha = -\beta+2\pi$ (o $\alpha=-\beta$)

$\sin\beta = -\sin\alpha$
$\cos\beta = \cos\alpha$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ rotazione

<u>2° caso</u> $\alpha+\beta = \pi, 3\pi \Rightarrow \alpha = -\beta+\pi$ o $-\beta+\pi+(2\pi$
angoli supplementari

$\sin\beta = \sin\alpha$
$\cos\beta = -\cos\alpha$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ rifl.

<u>Conseguenza</u>: gli unici endom. ortogonali del piano sono rotazioni e riflessioni: <u>movimenti rigidi</u> del piano.

Nel primo caso A non ha autovalori se $\alpha \neq 0, \pi$, nei quali casi si ha $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Nel 2° caso si hanno sempre gli autovalori 1 e -1, $Aut(1)$, $Aut(-1)$ hanno dim 1: sono rette ortogonali e $\mathbb{R}^2 = Aut(1) \perp Aut(-1)$. ~~A~~ A si diagonalizza come $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il teorema che dà la forma normale per automorfismi ortogonali dice che questi sono i mattoni per costruire la forma normale.

<u>Teorema</u> Forma normale per automorfismi ortogonali. <u>Caso reale.</u>

V sp. euclideo di dim finita n

$f: V \to V$ automorfismo ortogonale

Esiste una base <u>ortonormale</u> $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia del tipo

riflessioni

rotazioni

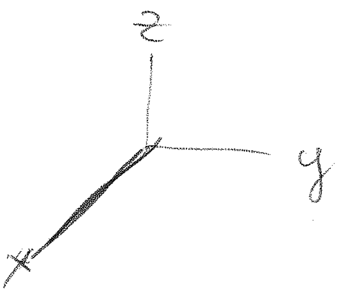
$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{matrix}} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Questo è il primo esempio di teorema in cui il caso complesso è più "semplice" del caso reale, dovuto al fatto che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Per esempio per $n=3$ una forma normale è:

1) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $v=(x,y,z) \xrightarrow{f} (x,-y,-z)$.

La retta x è fissa, nel piano yz ho una rotazione di π.



f è la rotazione di π intorno all'asse x. Il piano yz è l'autospazio di autovalore -1.

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

L'asse x viene riflesso intorno all'origine, il piano yz ruotato di un angolo α.

$$\underset{(x,0,0)+(0,y,z)}{\underset{\parallel}{(x\ y\ z)}} \longrightarrow \begin{pmatrix} -x, \ y\cos\alpha - z\sin\alpha, \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$(-x,0,0)+(0, y\cos\alpha \cdots\cdots)$$

—— ∘ ——

Dim. del Teorema.

Induzione su $n = \dim V$. Base dell'induz.: $n=1$ e 2.

$\boxed{\text{Se } n=1}$, una matrice ortogonale è (1) o (-1), quindi del tipo $(*)$.

$\boxed{\text{Se } n=2}$, sia B una base orto~~gonale~~normale di V di dim 2. Allora f è rappresentato da una matrice del tipo $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ o

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ (pag. 21)

Nel primo caso f non è diagonalizzabile, e abbiamo uno dei blocchi 2×2, nel secondo caso ci sono 2 autovalori $1, -1$ e $V = Aut(1) \oplus Aut(-1)$; e prendendo v_1, v_2 versori nei 2 autospazi, troviamo una base ortonormale $B' = (v_1, v_2)$ risp. a cui $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Questa era la base dell'induzione.

Per dim. il passo induttivo ci serve dim. il seguente:

<u>Lemma</u> Sia V un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale di dim finita $n \geq 1$. Sia $f: V \to V$ un endomorfismo. Allora $\exists W \subseteq V$ con dim $W = 1$ o 2, tale che $f(W) \subseteq W$: W è detto <u>invariante rispetto a f</u>.

<u>Dim</u> del Lemma.

1) Se f ha un autovalore λ, sia $v \neq 0$ un autovettore di autovalore λ: $f(v) = \lambda v$.
Allora $W = \langle v \rangle$ ha dim 1 ed è invariante per f. $(f(cv) = c f(v) = c\lambda v \in W)$

2) Altrimenti: sia $\mathcal{B}$ una base di V, e sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ matrice reale $n \times n$.

Passiamo nell'ambiente complesso:

considerianmo $L_{\mathbb{C}}(A) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Ora, poichè siamo su $\mathbb{C}$, $L_{\mathbb{C}}(A)$ ha almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ e un autovettore in $\mathbb{C}^n$. λ è una radice del polinomio caratteristico $p_{L_{\mathbb{C}}(A)}(x) = p_A(x)$: polinomio a coefficienti reali perchè A è reale.

ci) Vogliamo dim. che anche $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(x)$:

scriviamo $p_A(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$, $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$;

$p_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n \lambda^n = 0$; coniughiamo:

$$\overline{p_A(\lambda)} = \bar{0} = 0$$

$$\overline{c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{\lambda} + \dots + \bar{c}_n\bar{\lambda}^n =$$

perchè $c_i \in \mathbb{R}$ $= c_0 + c_1\bar{\lambda} + \dots + c_n\bar{\lambda}^n$.

Dunque anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di $L(A)$.

Se $\lambda = \bar{\lambda}$, λ è reale e torniamo al caso precedente. Supp. dunque $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

(ii) Sia v autovettore di λ; verifichiamo che $\bar{v}$ è autovettore di $\bar{\lambda}$: ~~infatti~~ $v \in \mathbb{C}^n$

$L_{\mathbb{C}}(A)(v) = Av = \lambda v$. Ora coniughiamo:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\,\bar{v} \\ &\;\, \| \\ &\bar{A}\bar{v} \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ è reale}}}{=} A\bar{v} \end{aligned}\right\} \quad \bar{v} \text{ è autovettore di autovalore } \bar{\lambda}.$$

Siccome $\lambda \neq \bar{\lambda} \Rightarrow v, \bar{v}$ sono linearm. indip.

(iii) A partire da $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^n$ ci costruiamo ora due vettori reali lin. indip. in $\mathbb{R}^n$ che generino un sottosp. invariante per $L(A) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Scriviamo $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$.

Allora $v + \bar{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Re}\, z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$;

$$i(v - \bar{v}) = i \begin{pmatrix} z_1 - \bar{z}_1 \\ \vdots \\ z_n - \bar{z}_n \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i\,\mathrm{Im}\, z_1 \\ \vdots \\ i\,\mathrm{Im}\, z_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\, z_1 \\ \vdots \\ -\mathrm{Im}\, z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Oss. che $v + \bar{v}$, $i(v - \bar{v})$ sono lin. indip. perché lo sono $v, \bar{v}$ e $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = 2i \neq 0$.

Sia $W = \langle v+\bar{v},\ i(v-\bar{v}) \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ di dim 2.

$$L(A)(v+\bar{v}) = A(v+\bar{v}) = Av + A\bar{v} = \lambda v + \bar{\lambda}\bar{v} =$$

$\lambda = x+iy$

$$= (x+iy)v + (x-iy)\bar{v} = x(v+\bar{v}) + y(iv - i\bar{v}) \in W$$

$$L(A)(iv - i\bar{v}) = Aiv - Ai\bar{v} =$$

$$= i\lambda v - i\bar{\lambda}\bar{v} = (ix-y)v - (ix+y)\bar{v} =$$

$$= -y(v+\bar{v}) + x(iv - i\bar{v}) \in W.$$

Dunque $L(A)(W) \subseteq W$. Ora passiamo in V mediante l'isomorf. K_B: $K_B^{-1}(W)$ è il sottospazio invariante per f cercato.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & V \arrow[d, "K_B"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L(A)"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$f(K_B^{-1}(W)) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{diagramma} \\ \text{commutativo}}}{=} K_B^{-1}(L(A)(W)) \underset{\substack{\downarrow \\ W \text{ invariante} \\ \text{per } L(A)}}{\subseteq} K_B^{-1}(W) \qquad \blacksquare$$

Questo finisce la dim del lemma.

Dim. del passo induttivo del teorema.

$f: V \to V$ ortogonale, $\dim V = n$.

f è un automorfismo di V. Perciò per il Lemma $\exists\, W$ di dim 1 o 2 t.c. $f(W) \subseteq W$. Ma f è auto $\Rightarrow \dim W = \dim f(W)$; ma $f(W) \subseteq W$

e quindi $f(W) = W$. Da ciò segue

anche $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$: infatti

se $v \in W^\perp$, $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall\, w \in W \Rightarrow$

$\langle f(v), f(w) \rangle = 0 \quad \forall\, w \in W$, ma $f(W) = W$

perciò al variare di w in W, $f(w)$ descrive tutto W,

e dunque $f(v) \in W^\perp$. Perciò $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$

e, come prima, sono uguali: $f(W^\perp) = W^\perp$.

Ora abbiamo finito:

$f|_W : W \to W$ e $f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ sono

endomorfismi ortogonali. Prendiamo

basi ortonormali B_1 di W e B_2 di $W^\perp$

come da ipotesi induttiva; $B = B_1 \cup B_2$ è

base di $V = W \oplus W^\perp$, base ~~ortogonale~~ ortonormale.

Inoltre $M_B(f)$ è a blocchi del tipo:

per la base dell'induzione

1x1
o 2x2

$$\begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_{W^\perp}) \end{pmatrix}$$

come richiesto dalla tesi per la base dell'induz.

come richiesto dalla tesi per ip. induttiva:

$\dim W^\perp = \begin{cases} n-1 & \text{se } \dim W = 1 \\ n-2 & \text{se } \dim W = 2 \end{cases}$

Oss. che abbiamo usato: se vale il teorema per $n-1$ o $n-2$, allora vale per n. Variante del principio d'induzione.

O principio d'induzione completa: se vale il teorema $\forall\, m < n$, allora vale per n.

— · —

Corollario per le matrici ortogonali.

Se A è una matrice ortogonale, allora $\exists$ una matrice ortogonale S t.c. $S^{-1}AS = {}^tSAS$ è della forma descritta nel Teorema.

Stessa dim. del caso unitario.

Esempio Endom. ortog. di $\mathbb{R}^3$.

Non c'è bisogno del Lemma perché il pol. caratteristico $p_f(x)$ ha grado 3, ha coeff. reali perciò ha 3 radici reali opp. 1 radice reale e 2 complesse coniugate.

Ha almeno una radice reale, dunque f ha almeno un autovalore λ_1 pari a 1 o -1. Se v_1 è un autovettore di norma 1 corrispondente a λ, $\underset{\overset{\shortparallel}{W}}{\langle v_1\rangle^{\perp}}$ ha dim 2 ed è invariante: $F(W)=W$.

Se v_2, v_3 è una base ortonormale di W, si ha che $M_B(f)$, dove $B=(v_1,v_2,v_3)$, è del tipo:

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A'}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

dove A' rappresenta $f|_W$ risp. a (v_2, v_3). Dunque $A' \in O(2)$.

Ora distinguiamo 2 casi:

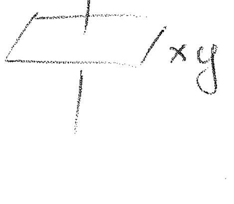
1) $\det(f) = 1 = \det A$

Se $\lambda_1 = -1$, anche $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ rotaz. di π intorno all'asse y

Se $\lambda_1 = 1$, anche $|A'| = 1$ e otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ → rotaz. intorno a un asse

2) $\det(f) = -1$; se $\lambda_1 = 1$, $\det A = -1$, e se $\lambda_1 = -1$, $\det A = 1$, e otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

riflessione risp. a un piano fisso: autospazio di autovalore 1



l'asse x viene riflesso intorno all'origine e il piano yz ruotato di un angolo α

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

matrice ortogonale e matrice unitaria complessa

Vogliamo S matrice unitaria t.c. $S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} = (\cos\alpha - x)^2 + \sin^2\alpha =$$

$$= x^2 - 2\cos\alpha\, x + 1, \quad \frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$$

$x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$. La forma normale di A sarà $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}$

Calcoliamo gli autovettori:

$\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha) & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix}$$

ha det 0

$\sin\alpha\, x - i\sin\alpha\, y = 0$

$x - iy = 0 \Rightarrow x = 1,\ y = -i$ è una $\to (1,-i)$ opp. $(i,1)$

soluzione, normalizzo: $v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(1,-i)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}\right) = v_1$

$\|v\| = \sqrt{1 + (-i)(i)} = \sqrt{1 - i^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$\lambda_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$, $ix - y = 0$, $v_2 = \frac{(1, i)}{\sqrt{2}}$: normalizzat

$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \overline{v_1}$: come sapevamo.

$B = (v_1, v_2)$ è base ortonorm.,
$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$ {}^t\bar{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} $$

$$ {}^t\bar{S}S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : $$

S è unitario.

Inoltre $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$

$$ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}} & -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{i\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{i\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}} & -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{i\cos\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{i\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{i\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha}{2} + i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} - i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} \\ \frac{\cos\alpha}{2} - i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} + i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{i\operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{i\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha}{2} \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} . $$

$\blacksquare$