ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 11

Trieste, 10 gennaio 2020

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Fissato $v \in V$, si definisca $\varphi_v : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$, per ogni $w \in V$.

(1) Dimostrare che φ_v è lineare (e quindi $\varphi_v \in V^*$).
(2) Dimostrare che $\varphi : V \to V^*$ definita da $\varphi(v) = \varphi_v$ è lineare.
(3) Dimostrare che φ è iniettiva. Se la dimensione di V è finita, allora è anche suriettiva e quindi un isomorfismo.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si fissi il prodotto scalare standard. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 - 3x_4 = x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$; si calcoli una base ortonormale di W e la si completi ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. (1) Data la matrice unitaria

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcolino la forma normale diagonale di A, una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A e una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

(2) Data la matrice unitaria

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcolino la forma normale diagonale di B, una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori di B e una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}BS$ sia diagonale.

(3) Sia $f : \mathbb{R}^n \to R^n$ l'automorfismo definito da $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3, \dots, f(e_{n-1}) = e_n, f(e_n) = e_1$ dove gli e_i rappresentano i vettori della base canonica. Trovare la matrice A di f rispetto alla base canonica (una matrice ortogonale e unitaria), gli autovalori di f e la forma normale unitaria (diagonale) di A.

Esercizio 4. Nell'esercizio 3 si è calcolata la forma normale diagonale delle seguenti matrici considerate come matrici unitarie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcoli ora la forma normale di queste matrici considerate come matrici ortogonali.

Esercizio 5.
(1) Siano $f, g : V \to V$ due endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano (cioè $f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subseteq \mathrm{Aut}_f(\lambda)$, cioè $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ è invariante per g.
(2) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Utilizzando il teorema sulla forma normale per automorfismi unitari, dimostrare che esiste una base ortonormale di V formata da autovettori comuni a f e g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente).

(Suggerimento: considerare la restrizione $g : \mathrm{Aut}_f(\lambda) \to \mathrm{Aut}_f(\lambda)$ a ogni autospazio di f, e ricordare che è diagonalizzabile ...)