(i) S.o.c. su $L^2([0,\ell])$:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\ell}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\}_{n\geq 1}$$

$x \in [0,\ell] \Rightarrow y = x - \frac{\ell}{2} \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{\ell}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}\left(y+\frac{\ell}{2}\right)\right)\right\}_{n\geq 1}$ s.o.c. su $L^2([-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}])$

$\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}y + \frac{n\pi}{2}\right)$ è proporzionale a $\cos\left(\frac{2k\pi}{\ell}y\right)$ per $n=2k$

ed è proporzionale a $\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}y\right)$ per $n=2k-1$

Ridefinendo $\frac{\ell}{2} = L$, otteniamo che:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi y}{L}\right)\right\}_{k\geq 1}$$

è un s.o.c. su $L^2([-L,L])$.

(ii) $f, g \in L^2([-L,L])$ con $\frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2g}{dx^2} \in L^2([-L,L])$, allora:

$$\left(g, \frac{d^2f}{dx^2}\right) = \int_{-L}^{+L} dx\, g^*(x)\frac{d^2f}{dx^2}(x) = -\int_{-L}^{+L} dx\, \frac{dg^*(x)}{dx}\frac{df(x)}{dx}$$

$$+ g^*(L)f'(L) - g^*(-L)f'(-L)$$

$$= +\int_{-L}^{+L} dx\, \frac{d^2g^*(x)}{dx^2}f(x) + g^*(L)f'(L) - g^*(-L)f'(-L)$$

$$- g^{*\prime}(L)f(L) + g^{*\prime}(-L)f(-L)$$

$\Rightarrow$ se $f, g \in D_0 = \left\{h \in L^2([-L,L]) \,\middle|\, \frac{d^2h}{dx^2} \in L^2([-L,L]), h'(\pm L) = 0\right\}$

allora $\left(g, \frac{d^2f}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2g}{dx^2}, f\right) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}$ è hermitiano su D_0.

D_0 è denso perché contiene il s.o.c. su $L^2([-L,L])$ trovato al punto (i).

(iii) $\frac{d^2f}{dx^2} = F$ con condizione al bordo $f'(\pm L) = 0$

Per risolvere possiamo usare il sistema o.c. trovato al punto (i) per espandere la forza esterna $F(x)$. Troviamo:

$$F(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)\right]$$

Ora usiamo che il sistema è formato da autovettori di d^2/dx^2, con autovalori:

$$\{0\} \cup \left\{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, -\left(\frac{(k-1/2)\pi}{L}\right)^2\right\}_{k\geq 1}$$

$\Rightarrow$ per risolvere deve essere necessariamente $a_0 = 0$, altrimenti dovremmo dividere per l'autovalore 0. Assumendo $a_0 = 0$, troviamo:

$$f(x) = \underbrace{\frac{c_0}{\sqrt{2L}}}_{} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \frac{b_k}{-\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)\right]$$

costante arbitraria: le condizioni $\frac{d^2f}{dx^2} = F$ e $f'(\pm L) = 0$ sono soddisfatte da $f(x) + c$ se sono soddisfatte da $f(x)$, quindi è giusto trovare una costante indeterminata.

Nota che i coefficienti di Fourier di $F(x)$ sono dati come sempre dai prodotti scalari con gli elementi del s.o.c., ovvero:

$$\begin{cases} a_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2L}}, F\right) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{+L} dx\, F(x) \\ a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{k\pi}{L}\cdot\right), F\right) = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L}^{L} dx\, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)F(x) \\ b_k = \left(\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{(k-1/2)\pi}{L}\cdot\right), F\right) = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L}^{+L} dx\, \sin\left(\frac{(k-1/2)\pi x}{L}\right)F(x) \end{cases}$$

Usando $F(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ troviamo:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{+L} dx\, \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2L}}\left(f'(L) - f'(-L)\right) = 0$$

Altro modo di vedere che deve essere $a_0 = 0$.

$\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ s.o.c.

$T(e^{(n)}) = e^{(2n)}$

$S(e^{(n)}) = \begin{cases} e^{(n/2)} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

(i) Avendo definito T e S su tutti gli elementi del s.o.c., sono automaticamente definiti per linearità su tutte le combinazioni lineari finite

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}, \quad N \in \mathbb{N}$$

che formano un sottoinsieme denso di H.

Inoltre se: $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)} \xrightarrow[N\to\infty]{} v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$

allora abbiamo che: $T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(2n)}$

$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty} \left(T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(2n)} \rightarrow$ converge perché $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \in l^2$.

Quindi possiamo estendere T con continuità e definire:

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(2n)}$$

e T definito in questo modo è automaticamente continuo come si vede anche da: $\|T(v)\| = \|v\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}$.

Analogamente per S abbiamo:

$$S\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{N/2} \alpha_{2k} e^{(k)} \quad \text{(assumendo } N \text{ pari)}$$

$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty} S\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} e^{(k)} \rightarrow$ converge perché se $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \in l^2$, a maggior ragione $\{\alpha_{2k}\}_{k\geq 1} \in l^2$ e si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{2k}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{2k-1}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

$\Rightarrow \|S(v)\| \leq \|v\| \Rightarrow$ anche S definisce un operatore continuo quando esteso in questo modo.

Calcoliamo le norme:

* da $\|T(v)\| = \|v\|$ segue che: $\|T\| = 1$
* da $\|S(v)\| \leq \|v\|$ segue che: $\|S\| \leq 1$. Inoltre

$S(e^{(2)}) = e^{(1)} \Rightarrow \|S(e^{(2)})\| = \|e^{(1)}\| = 1 \Rightarrow \|S\| \geq 1$

Pertanto: $\|S\| = 1$.

(ii) $v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$, $w = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{(n)}$

$$(w, T(v)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{(n)}, \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{(2m)}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m}^* \alpha_m$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} e^{(m)}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}\right)$$

$$= (Sw, v)$$

$\Rightarrow T^\dagger = S$.

(iii) $T(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(2n)}$, $T(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{(2n)}$

$$(T(v), T(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_n = (v, w).$$

T non è un operatore unitario perché non è invertibile. Per mostrare che non è invertibile basta esibire un vettore che non è nella sua immagine, ad esempio $e^{(1)}$; più in generale tutti i vettori della forma: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{(2k-1)} \notin \mathrm{Im}(T)$.

(iv) $T(v) = \lambda v$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(2n)} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$$

$$\Rightarrow \lambda \alpha_{2k-1} = 0 \quad \forall k \geq 1$$
$$\lambda \alpha_{2k} = \alpha_k \quad \forall k \geq 1$$

$\Rightarrow$ l'unica soluzione è $\alpha_k = 0 \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow$ non c'è nessun autovettore.

$S(v) = \lambda v$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e^{(n)} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$$

$$\Rightarrow \lambda \alpha_n = \alpha_{2n}, \quad \forall n \geq 1$$

Scrivendo n generico ≥ 1 come $(2k-1)2^m$ con $k \geq 1$ e $m \geq 0$, abbiamo:

$$\alpha_{2^m(2k-1)} = \lambda^m \alpha_{2k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (|\lambda|^2)^m |\alpha_{2k-1}|^2$$
$$= \frac{1}{1-|\lambda|^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{2k-1}|^2 \quad \text{se } |\lambda| < 1$$

$\Rightarrow \forall |\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{C}$, è autovalore di S, con autovettore:

$$v_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \alpha_{2k-1} e^{(2^m(2k-1))}$$

dove $\{\alpha_{2k-1}\}_{k \geq 1}$ è generica successione $\in \ell^2$.