Endomorfismi autoaggiunti

<u>Def.</u> V spazio vettoriale euclideo o unitario

$f : V \to V$ endomorfismo

f è detto <u>autoaggiunto</u> se $\forall\, v, w \in V$ si ha

$< f(v), w > = < v, f(w) >$. il prod. scalare è herm.

In partic. $<f(v), v> = <v, f(v)> = \overline{<v, f(v)>}$: è reale

<u>Prop.</u> Sia B una base ortonormale di V.

f è autoaggiunto se e solo se:

- caso reale: $M_B(f)$ è simmetrica: ${}^tA = A$
- caso complesso: $M_B(f)$ è hermitiana: ${}^t\bar{A} = A$.

<u>Dim.</u> Sia $A = M_B(f)$.

Allora, preso un vettore v, denoto $(x_1, \dots, x_n)$ le sue coordinate rispetto a B, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, e si ha che $f(v)$ ha coordinate Ax rispetto a B. Allora:

f è autoaggiunto $\iff \forall\, v, w \in V$

$<f(v), w> = <v, f(w)> \iff \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$

$<Ax, y> = <x, Ay> \iff$

${}^t(\overline{Ax})y = {}^t\bar{x}Ay$

$\overset{\|}{{}^t\bar{x}\,{}^t\bar{A}\, y}$ $\iff {}^t\bar{A} = A$.

siccome la base è ortonorm. il prod. scalare è quello standard

Per questo motivo gli endom. autoaggiunti reali vengono anche detti simmetrici o operatori simmetrici (si incontrano in geom. dif., meccanica quantistica, ...)

Che cosa si può dire di autovalori e autovettori?

Prop: Sia $f: V \to V$ autoaggiunto. Allora
1) se λ è un autovalore di f, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ovvio nel caso reale)
2) autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali (come per endom. ortog.)

Dim: 1) Sia $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

Si ha:
$$\begin{array}{ccc} \langle f(v), v \rangle & \overset{f \text{ autoaff.}}{=} & \langle v, f(v) \rangle \\ \| & & \| \\ \langle \lambda v, v \rangle & & \langle v, \lambda v \rangle \\ \| & & \| \\ \bar{\lambda} \langle v, v \rangle & & \lambda \langle v, v \rangle \end{array}$$

Da $\langle v, v \rangle \neq 0$ segue $\lambda = \bar{\lambda}$ cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori, v, w autovettori relativi.
$$\begin{array}{ccc} \langle f(v), w \rangle & \overset{f \text{ autoaff.}}{=} & \langle v, f(w) \rangle \\ \| & & \| \\ \langle \lambda v, w \rangle & & \langle v, \mu w \rangle \\ \lambda \text{ reale } \| & & \| \\ \lambda \langle v, w \rangle & & \mu \langle v, w \rangle \end{array}$$

Quindi $(\lambda-\mu)\langle v,w\rangle = 0$.

Ma $\lambda-\mu\neq 0 \Rightarrow \langle v,w\rangle = 0$. ■

Teorema spettrale

V sp. vett. euclideo o unitario, $\dim V = n$ finita.

$f: V \to V$ endom. autoaggiunto

Allora $\exists$ una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori di f e ogni autovalore è reale.

In particolare f è diagonalizzabile.

Dim: Distinguiamo caso reale e caso complesso. Quello complesso è più immediato.

$\boxed{K=\mathbb{C}}$ Induzione su n.

$n=1$ vero

Passo induttivo: siccome siamo su $\mathbb{C}$, $\exists\,\lambda$ autovalore di f (reale), sia $v_1\neq 0$ con $f(v_1)=\lambda v_1$. Supp. $\|v_1\|=1$ (se no normalizzo)

Def. $W = v_1^{\perp}$. Allora $\dim W = n-1$ e $V = \langle v_1\rangle \perp W$. Si ha inoltre $f(W)\subseteq W$. (W è invariante) Infatti sia $w\in W$: ciò significa $\langle v_1,w\rangle = 0$. Considero $\langle v_1, f(w)\rangle = \langle f(v_1), w\rangle = \langle \lambda v_1, w\rangle =$

λ è reale $= \lambda\langle v_1,w\rangle = 0$. Dunque $f(w)\in W$.

Allora $f|_W : W \to W$ è un endom. autoagg.: cui posso applicare l'ip. induttiva; $\exists$ in W $v_2, \dots, v_n$ base ortonormale di autovettori
$\Rightarrow \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è la base cercata.

$\boxed{K = \mathbb{R}}$

Voglio dim. che f ha almeno un autovalore.
Passo all'ambiente complesso.
Fisso una base ortonormale qualunque di V: $\mathcal{B}$

e considero $A = M_{\mathcal{B}}(f)$: matrice simmetrica reale, in particolare è hermitiana

$P_f(x) = P_A(x)$ ha coeff. reali, ha almeno una radice in $\mathbb{C}$; sia λ una tale radice.

λ è un autovalore di $L_{\mathbb{C}}(A) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

che è un endom. autoaggiunto. perché A è hermitiana Per la prop. precedente allora $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f ha almeno un autovalore reale.

A questo punto la dim. continua e si conclude come nel caso $K = \mathbb{C}$. ■

Corollario 1. A matrice reale simmetrica (o complessa hermitiana). Allora $\exists$ una matrice ortogonale reale (o unitaria complesse) tale che la seg. matrice sia diagonale a valori reali:

$$S^{-1}AS = {}^tSAS \qquad \text{caso reale}$$

$$\bar{S}^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS \qquad \text{caso complesso}$$

Dim. Considero $L(A): K^n \to K^n$ ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

Per il teor. spettrale $\exists$ $\mathcal{B}$ base ortonormale di autovettori di $L(A)$, e quindi

$M_{\mathcal{B}}(L(A))$ è diagonale e si ha

$M_{\mathcal{B}}(L(A)) = S^{-1}AS = S^{-1}M_{\mathcal{C}}(L(A))S$,

dove $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_{K^n})$

Essendo $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi ortonormali, S è matrice ortog., risp unitaria.

Inoltre sulla diagonale ci sono tutti gli autovalori di $L(A)$, che sono tutti reali.

Corollario 2 $f: V \to V$ endom. autoaggiunto. Allora $V = Aut(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus Aut(\lambda_k)$ somma diretta ortogonale degli autospazi di f.

Corollario 3 A matrice simmetrica reale. Allora $p_A(X)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$.

Come operare in pratica? Dato f, si costruisce $p_f(x)$, lo si fattorizza in fattori lineari:

$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdots (\lambda_k - x)^{r_k}$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

e $r_i = m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ $\forall i$, perché sappiamo già che f è diagonalizzabile. Poi:

- $\forall$ autovalore λ_i si determina $Aut(\lambda_i)$ risolvendo un sistema lineare omogeneo: si trova una sua base;
- si ortonormalizza la base (per es. con Gram-Schmidt);
- si uniscono le ~~le~~ basi trovate.

Esempio

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{simmetrica reale}$$

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{10}{15} - x & \frac{5}{15} & \frac{10}{15} \\ \frac{5}{15} & -\frac{14}{15} - x & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{11}{15} - x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(15)^3} \begin{vmatrix} 10-15x & 5 & 10 \\ 5 & -14-15x & 2 \\ 10 & 2 & -11-15x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(15)^3} \Big[-15^3 x^3 - (15)^2 15x - (\overbrace{154-110-140}^{-96}) 15x + 1540 +$$
$$+ 100 + 100 + 100(14+15x) + 4(15x-10) +$$
$$+ 25(11+15x) \Big] =$$

$$= \frac{1}{(15)^3} \Big[-15^3 x^3 - 15^3 x^2 + (96 + 100 + 4 + 25) \cdot 15x +$$
$$+ 1540 + 200 + 1400 \cancel{4} - 40 + 275 \Big] =$$

$$= \frac{1}{(15)^3} \Big[-15^3 x^3 - 15^3 x^2 + \underbrace{225}_{15^2} \cdot 15x + \underbrace{3375}_{15^3} \Big] =$$

$$= -x^3 - x^2 + x + 1 = -x^2(+x+1) + x + 1 = -(x+1)(x^2-1) =$$
$$= -(x+1)^2(x-1) \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1,\ r_1 = 1;\ \lambda_2 = -1,\ r_2 = 2.$$

$$\mathrm{Aut}(1): \quad \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 5 & -29 & 2 \\ 10 & 2 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 5 & -29 & 2 \\ \cancel{10} & \cancel{2} & \cancel{-26} \\ 5 & 1 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_2 = x_3, \quad x_1 = x_2 + 2x_3 = \frac{x_3}{2} + 2x_3 = \frac{5}{2} x_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{2}x_3, \frac{x_3}{2}, x_3\right) = x_3\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$Aut(1) = \langle (5, \overset{\overset{u_1}{\shortparallel}}{1}, 2) \rangle$$

$$v_1 = \frac{(5,1,2)}{\sqrt{25+1+4}} = \frac{(5,1,2)}{\sqrt{30}}.$$

$$Aut(-1) \qquad \begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 \qquad (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3, x_2, x_3\right) =$$

$$= x_2\left(-\frac{1}{5}, 1, 0\right) + x_3\left(-\frac{2}{5}, 0, 1\right)$$

$$Aut(-1) = \langle (-1, \overset{\overset{u_2}{\shortparallel}}{5}, 0), (-2, \overset{\overset{u_3}{\shortparallel}}{0}, 5) \rangle$$

base non ortonormale

1) Ortonormalizzo $Aut(-1)$ con Gram-Schmidt.

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-1, 5, 0)}{\sqrt{26}}$$

$$\tilde{u}_3 = \langle v_2, u_3 \rangle v_2 = \left\langle \frac{(-1,5,0)}{\sqrt{26}}, (-2,0,5) \right\rangle v_2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{26}}\left(\frac{-1}{\sqrt{20}}, \frac{5}{\sqrt{20}}, 0\right) = \left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}, 0\right)$$

$$u_3 - \tilde{u}_3 = (-2, 0, 5) - \left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}, 0\right) = \left(-\frac{25}{13}, -\frac{5}{13}, 5\right)$$

$$v_3 = \frac{u_3 - \tilde{u}_3}{\|u_3 - \tilde{u}_3\|}$$

$$\|u_3 - \tilde{u}_3\| = \sqrt{\frac{25^2}{13^2} + \frac{5^2}{13^2} + 5^2} = \frac{5}{13}\sqrt{25+1+169} =$$

$$= \frac{5}{13}\sqrt{195}$$

$$v_3 = \frac{13}{5\sqrt{195}}\left(-\frac{25}{13}, -\frac{5}{13}, 5\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{195}}\left(-5, -1, 13\right).$$

<u>Metodo alternativo</u>

2) Cerco un vettore (x_1, x_2, x_3) ortog. sia a u_1 sia a u_2:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

una soluzione è $(-10, -2, 26) = 2(-5, -1, 13)$.

Poi normalizzo $\frac{(-5, -1, 13)}{\sqrt{25+1+169}} = \frac{(-5, -1, 13)}{\sqrt{195}}$.

La matrice S è la seguente:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{26}} & \frac{-5}{\sqrt{195}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{-1}{\sqrt{195}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{13}{\sqrt{195}} \end{pmatrix}$$

ortogonale, con colonne le coordinate di v_1, v_2, v_3.

Quello che abbiamo fatto nel secondo caso è il <u>prodotto esterno o vettoriale</u> o wedge di 2 vettori di $\mathbb{R}^3$;

è un'applicazione $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longrightarrow x \times y \quad \text{opp.} \quad x \wedge y$$

def. da $x \times y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

che si usa scrivere $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, dove $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$

base canonica (sviluppo di Laplace secondo la I riga).

<u>Proprietà</u> Il prodotto esterno di 2 vettori in $\mathbb{R}^3$ è:

1) bilineare
2) antisimmetrico
3) $x \times y = 0 \iff x, y$ sono lin. indipendenti.
4) $x \times y$ è ortogonale sia a x sia a y, e dunque al piano generato da x e y.

<u>Dim.</u> 1) 2) 3) seguono dal fatto che le coordinate di $x \times y$ sono i minori 2×2 della matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

La 4) segue dallo sviluppo dei determinanti nulli $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$.

Oss. che si ha anche:

$$\langle x \times y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$ ed è nullo

se e solo se x, y, z sono lin. dipendenti. È detto <u>prodotto misto</u> di x, y, z e denotato (x, y, z).

Calcoliamo la norma di $x \times y$:

$$\|x \times y\|^2 \overset{\text{conto}}{=} \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 =$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2 \vartheta =$$ ϑ angolo di x e y

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \vartheta) =$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \vartheta .$$

Perciò $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin \vartheta$ perchè ϑ è convesso.

coincide con l'area del parallelogramma di lati i vettori x e y.