Soluzione Esercizio 1

I Usando che la trasformata del prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate

$$\widehat{G^{*n}}(\omega) = (-1)^n \frac{1}{(1+\omega^2)^n} \ .$$

II La somma della serie geometrica (che converge perché $|\frac{1}{1+\omega^2}| < 1$) dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{G^{*n}}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+\omega^2)^n} - 1 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\omega^2}} - 1 = -\frac{1}{2+\omega^2} \ .$$

III Dobbiamo calcolare l'integrale che definisce l'anti-trasformata, ovvero

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\frac{1}{2+\omega^2}\right) e^{-i\omega t} \ .$$

Usando il lemma di Jordan, per $t \geq 0$ chiudiamo il contorno con un arco nel semipiano inferiore del piano complesso ω, e riceviamo contributo solo dal polo in $\omega = -i\sqrt{2}$, viceversa per $t < 0$ chiudiamo nel semipiano superiore e riceviamo contributo dal polo in $\omega = i\sqrt{2}$. Quindi troviamo

$$g(t) = \begin{cases} -2\pi i \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{-2\sqrt{2}i}\right) e^{-\sqrt{2}t} \ , & t \geq 0 \\ 2\pi i \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right) e^{\sqrt{2}t} \ , & t < 0 \end{cases} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|} \ .$$

Soluzione Esercizio 2

I Ponendo $z = \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ otteniamo la seguente equazione per la variabile e^{it}

$$(e^{it})^2 - 2z\, e^{it} + 1 = 0 \Rightarrow (e^{it})_{\pm} = \frac{z \pm i\sqrt{1-z^2}}{2} \ .$$

Dato che vogliamo ottenere $t = \arccos(z) \in [0, \pi]$, richiediamo che e^{it} sia sulla parte del cerchio unitario tra gli angoli 0 e π, dunque e^{it} deve avere parte immaginaria positiva. Pertanto va scelto il segno $+$. Per concludere basta prendere il logaritmo e dividere per i.

II Percorrendo in maniera continua un cerchio di raggio infinitesimo attorno a $z = 1$

$$z - 1 \to (z-1)e^{2\pi i}$$

si ha che

$$\sqrt{1-z} \to -\sqrt{1-z} \ , \quad \sqrt{1-z^2} \to -\sqrt{1-z^2} \ . \tag{1}$$

Usando questo dentro l'argomento del logaritmo, troviamo (nota che per z vicino a 1 l'argomento del logaritmo è molto vicino a 1 e quindi possiamo ignorare la discontinuità del logaritmo in questo calcolo)

$$\log(z+i\sqrt{1-z^2}) \to \log(z-i\sqrt{1-z^2}) = \log\left(\frac{1}{z+i\sqrt{1-z^2}}\right) = -\log(z+i\sqrt{1-z^2}) \ .$$

Pertanto

$$F(z) \to \frac{-\log(z+i\sqrt{1-z^2})}{-\sqrt{1-z}} = \frac{\log(z+i\sqrt{1-z^2})}{\sqrt{1-z}} = F(z) \ ,$$

e dunque $F(z)$ non ha un punto di diramazione in $z=1$.

III Da un semplice calcolo si ottiene

$$\frac{df}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(-\frac{1}{\sqrt{z+1}}\right) \ .$$

Dato che $-\frac{1}{\sqrt{z+1}}$ è olomorfa in $z=1$, ammette una serie di Taylor centrata in questo punto, i cui coefficienti possiamo denotare con a_n, e troviamo così l'espansione richiesta. Usando l'espressione fornita per $f(z)$, vediamo che

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1-z)^{n-1} \ ,$$

da cui segue

$$F(1) = b_1 = -2a_0 = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{z+1}}\right)\bigg|_{z=1} = \sqrt{2} \ .$$

Soluzione Esercizio 3

I Notiamo che

$$\begin{aligned}
&\left(T(e^{(n)}), T(e^{(m)})\right) \\
&= \left(\frac{e^{(2n-1)}+e^{(2n)}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{(2m-1)}+e^{(2m)}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(e^{(2n-1)}, e^{(2m-1)}\right) + \left(e^{(2n-1)}, e^{(2m)}\right) + \left(e^{(2n)}, e^{(2m-1)}\right) + \left(e^{(2n)}, e^{(2m)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta_{nm} + 0 + 0 + \delta_{nm}\right] = \delta_{nm} \ .
\end{aligned}$$

Pertanto dati due arbitrari vettori $v, w \in H$, i cui coefficienti di Fourier nel s.o.c. denoteremo rispettivamente con α_n e β_n, troviamo

$$(T(v), T(w)) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m \left(T(e^{(n)}), T(e^{(m)})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_n = (v, w) \ .$$

T non è unitario perché non è invertibile, come si vede dal fatto che i vettori $e^{(2n-1)} - e^{(2n)}$ sono ortogonali a tutti i vettori in $\mathrm{Im}(T)$.

II Notiamo che

$$
\begin{aligned}
&\left(e^{(n)}, T(e^{(m)})\right) \\
&= \left(e^{(n)}, \frac{e^{(2m-1)} + e^{(2m)}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta_{n,2m-1} + \delta_{n,2m}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \delta_{\frac{n+1}{2},m} & \text{, per } n \text{ dispari,} \\ \delta_{\frac{n}{2},m} & \text{, per } n \text{ pari} \end{cases} \\
&= \left(T^\dagger(e^{(n)}), e^{(m)}\right) \ .
\end{aligned}
$$

Nell'ultima riga abbiamo definito

$$
T^\dagger(e^{(n)}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(\frac{n+1}{2})} & \text{, per } n \text{ dispari,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(\frac{n}{2})} & \text{, per } n \text{ pari.} \end{cases}
$$

Verifichiamo che in effetti questo operatore è l'aggiunto. Dati due vettori arbitrari v e w in H abbiamo

$$
(v, T(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m \left(e^{(n)}, T(e^{(m)})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^* \beta_m \left(T^\dagger(e^{(n)}), e^{(m)}\right) = (T^\dagger(v), w) \ .
$$

III Supponiamo $T(v) = \lambda v$. Denotando con α_n i coefficienti di Fourier di v, questa uguaglianza implica

$$
\lambda \alpha_n = \begin{cases} \alpha_{\frac{n+1}{2}} & \text{, per } n \text{ dispari,} \\ \alpha_{\frac{n}{2}} & \text{, per } n \text{ pari.} \end{cases}
$$

Se fosse $\lambda = 0$ da questa equazione seguirebbe subito $\alpha_n = 0$ per ogni n, quindi possiamo restringerci a $\lambda \neq 0$. Con questa assunzione, mostriamo per induzione su n che $\alpha_n = \alpha_1$ per ogni $n \geq 1$. È banalmente vero per $n = 1$. Supponiamo che $\alpha_n = \alpha_1$ sia vero per ogni $n < N$, allora dall'equazione abbiamo che $\alpha_N = \frac{1}{\lambda}\alpha_1$. Inoltre dall'equazione stessa per $n = 1$ abbiamo che $\alpha_1 = \lambda \alpha_1$, quindi abbiamo trovato $\alpha_N = \alpha_1$, che conclude la dimostrazione per induzione. Pertanto la successione α_n è costante, ma deve anche essere a quadrato sommabile, e dunque l'unica possibilità è che $\alpha_n = 0$ per ogni n. Segue che $v = 0$ e non c'è nessun autovettore per T.

Invece dalla definizione di $T^\dagger$ abbiamo: $T^\dagger(e^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(1)}$. Dunque $e^{(1)}$ è autovettore di $T^\dagger$.