

## ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 12

Trieste, 15 gennaio 2020

**Esercizio 1.** Si consideri la seguente matrice ortogonale che rappresenta una riflessione

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcolare una matrice ortogonale  $S$ , e la sua inversa  ${}^tS$ , tali che  ${}^tSAS$  sia una matrice diagonale.

La retta di riflessione è l'autospazio di  $A$  rispetto all'autovalore 1; dimostrare che questa retta forma un angolo  $\alpha/2$  con l'asse della prima coordinata  $x_1$  di  $\mathbb{R}^2$ . (Potrebbe essere utile la formula  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .)

Per la matrice ortogonale  $S$  si può scegliere una rotazione (qual è l'angolo della rotazione?) oppure una riflessione (qual è l'angolo della retta di questa riflessione con l'asse delle prima coordinata?). Dare un'interpretazione geometrica in tutti e due i casi.

**Esercizio 2.** (1) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare gli autovalori e la forma normale diagonale di  $A$ ; trovare poi una matrice ortogonale  $S$  tale che  $S^{-1}AS$  sia una matrice diagonale.

(2) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trovare gli autovalori e la forma normale diagonale di  $A$ ; trovare poi una matrice ortogonale  $S$  tale che  $S^{-1}AS$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo anti-autoaggiunto, cioè tale che  $\langle v, f(w) \rangle = -\langle f(v), w \rangle$  per tutti i  $v, w \in V$ . Dimostrare che:

- (1) ogni autovalore di  $f$  è in  $i\mathbb{R}$  (un numero immaginario puro, o 0);
- (2) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;
- (3) la matrice di  $f$  rispetto a una base ortonormale di  $V$  è anti-hermitiana ( $A = -{}^t\bar{A}$ );
- (4) esiste una base ortonormale di autovettori di  $f$ .

**Esercizio 4.** Data la forma quadratica reale  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ , scrivere  $q$  nella forma  $q(x) = {}^t xAx$ , con una matrice simmetrica  $A$ . Trovare una matrice ortogonale  $S$ , e la sua inversa, tali che  $S^{-1}AS$  sia diagonale; quali sono gli assi principali di  $q$ ? Come si scrive la forma quadratica  $q$  nelle nuove coordinate  $y$ , con  $x = Sy$ ? Fare poi un disegno schematico del sottinsieme  $\{x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = 1\}$  nelle nuove coordinate  $y$ .