Applicazione geometrica del teorema spettrale.

Esempio

Sia A la seguente matrice simmetrica reale:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$: è la matrice

di un endomorfismo autoaggiunto $L(A)$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica.

Ma Ad A corrisponde anche la forma bilineare simmetrica b su $\mathbb{R}^3$, t.c. $A = M_{\mathcal{E}}(b)$:

$$b(x,y) = {}^tXAY = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

Possiamo considerare $q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{q(x) = b(x,x)} = 2x_1^2 - 6x_1x_3 - x_2^2 + 2x_3^2.$$

q è una forma quadratica su $\mathbb{R}^3$, applicazione rappresentata da un polinomio omogeneo di 2° grado in x_1, x_2, x_3.

Sia $X = \{(x_1\ x_2\ x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 - 6x_1x_3 - x_2^2 + 2x_3^2 = 1\}$.

è una superficie quadrica in $\mathbb{R}^3$. Vogliamo studiarla per capirne la geometria.

Usiamo il teorema spettrale:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ -3 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (4-4x+x^2)(-1-x) + 9(1+x) =$$

$$= (1+x)(9-4+4x-x^2) = -(x+1)(x^2-4x-5) =$$

$$= -(x+1)(x-5)(x+1) = -(x+1)^2(x-5).$$

Allora $\exists$ una matrice ortogonale S 3×3 t.c.

$$S^{-1}AS = {}^tSAS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ matrice diagonale

con gli autovalori di S nella diagonale.

Interpretiamo S come la matrice di un cambiamento di base: $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$.

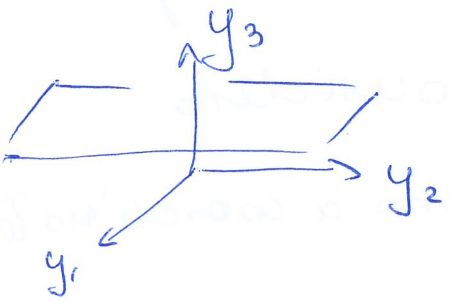
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "K_{\mathcal{C}} = id_{\mathbb{R}^3}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "L(S)"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X = (x_1, x_2, x_3) \arrow[r, "id"] \arrow[d] & X \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
y = (y_1, y_2, y_3) \arrow[r] & \boxed{Sy = X}
\end{tikzcd}$$

Se $X = SY$, le (y_1, y_2, y_3) sono le coordinate di $X = (x_1, x_2, x_3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Allora $q(X) = b(X, X) = {}^tXAX = {}^t(SY)A(SY) =$
$= {}^tY(\underbrace{{}^tSAS}_{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}})Y = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2 = q'(y)$.

L'equazione della superficie nel nuovo sistema di coordinate è molto più semplice:

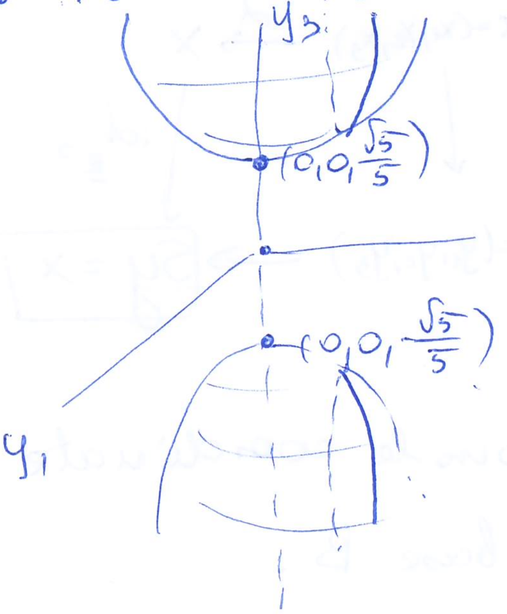
$$\boxed{-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2 = 1}$$



abbiamo evidenziato gli assi principali y_1, y_2, y_3.
Se tagliamo X con un piano $y_3 = k$, troviamo
$y_1^2 + y_2^2 = 5k^2 - 1$:

$y_1^2 + y_2^2 = 5k^2 - 1$:

- è l'equaz. di una cf se $5k^2 - 1 > 0$, cioè $k^2 > \frac{1}{5} \iff k > \frac{\sqrt{5}}{5}$ opp. $k < -\frac{\sqrt{5}}{5}$;
- è un punto se $k^2 = \frac{1}{5}$
- non ho soluz. reali se $-\frac{\sqrt{5}}{5} < k < \frac{\sqrt{5}}{5}$



Se invece tagliamo con piani del tipo $y_1 = k$,

- $y_2 = k$, otteniamo delle iperboli:

$5y_3^2 - y_1^2 = 1 + k^2$

~~Con~~ La trasformazione $X = SY$ (o $Y = S^{-1}X = {}^tSX$)

è ortogonale, la sup. non viene deformata, si conservano le lunghezze.

Se $B = (v_1, v_2, v_3)$ e considero

$B' = (v_1, v_2, \frac{v_3}{\sqrt{5}})$, passo a coordinate

$(1,0,0)$ $\quad (0,1,0) \quad (0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})$

(z_1, z_2, z_3) tali che

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{M_B^{B'}(id)} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} z_3 \end{cases}$$ e l'equazione si trasforma

così:

$$-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2 = -z_1^2 - z_2^2 + 5\left(\frac{z_3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$$-z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 = 1$$

Ora la matrice della forma bilineare ha solo 1, e −1 sulla diagonale $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, però ho deformato le lunghezze: ho cambiato unità di misura sul terzo asse. B' è ortogonale ma non ortonormale. Ho operato una trasformazione "affine" non ortogonale (non è un'isometria). Ora ho 1 dove c'era $\sqrt{5}$ che è > 0.

Vogliamo la matrice S e gli assi principali.

$\lambda_1 = -1 \qquad A + E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ rig 1

Aut(−1): $x_1 - x_3 = 0$

Base: $(1,0,1), (0,1,0)$: è già ortogonale, normalizzo e trovo

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\quad v_2 = e_2$.

$\lambda_2 = 5$ $\quad A - 5E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ha rg 2

$\mathrm{Aut}(5)$: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ Base: $(1,0,-1)$.

Normalizzo: $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

Per questa scelta di base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$,

ottengo $\quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$: ortogonale.

$X = SY \implies Y = S^{-1}X = {}^tS\,X$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}} \\ x_2 \\ \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Gli assi principali sono gli assi y_1, y_2 e y_3 dunque hanno equazioni:

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 = 0 \\ y_2 = x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \cancel{x_1 = x_3 = 0}$ $\quad$ asse y_3

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 = 0 \\ y_3 = x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_3 = 0$ $\quad$ asse y_2

$\begin{cases} y_2 = x_2 = 0 \\ y_3 = x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad$ asse y_1

Sono le rette generate dai 3 vettori di $\mathcal{B}$.

In generale:

<u>Teorema</u> (di trasformazione ad assi principali)

Sia $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(b)$: matrice simmetrica.

Allora:

1) Esiste una base ortonormale $\mathbb{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A. Quindi $\exists$ $S = M_{\mathcal{B}}^{\mathbb{B}}(id)$, matrice ortogonale, t.c. $M_{\mathbb{B}}(b) = {}^tSAS$ sia diagonale: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A.

Questo segue applicando il teorema spettrale.

2) $\exists$ una base <u>ortogonale</u> $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$ di $\mathbb{R}^n$ ($v_i' = \frac{v_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ se $\lambda_i > 0$) (non necessariamente ortonormale) di autovettori di A, tale che

$M_{\mathcal{B}'}(b) = {}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$: matrice diagonale con soli $1, -1, 0$ sulla diagonale principale: tanti 1 quanti autovalori positivi, e -1 quanti autovalori negativi.

$T = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$: in generale non è ortogonale.

Gli assi del nuovo sistema di coordinate sono detti assi principali per b, o per q, la forma quadratica associata.

Se si parte da q, forma quadratica cioè polinomio omogeneo di II° grado, $q(x) = {}^t x A x$, A simmetrica:

1) $\exists$ un cambiamento di base ortonormale t.c. q assume la forma $q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ combinazione lineare di quadrati; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A.

2) $\exists$ un cambiamento di base t.c.
$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2, \quad r+s \leq n,$$
r = numero di autovalori positivi

s = numero di autovalori negativi

$n-(r+s)$ = ~~num~~ molteplicità dell'autovalore nullo.

$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(b)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(b)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V

Allora $A' = {}^t S A S$, dove $S = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)$.

Infatti: se v ha coord. x risp. a $\mathcal{B}$, x' risp. a $\mathcal{B}'$

w " y " $\mathcal{B}$, y' – – $\mathcal{B}'$, si ha: $X = Sx'$, $y = Sy'$.

Inoltre $b(v,w) = {}^t x A y = {}^t(Sx') A (Sy') =$

$$= {}^t x' \underbrace{({}^t SAS)}_{= A'} y'.$$

Def. 2 matrici quadrate A, A' $n \times n$ sono dette <u>congruenti</u> se $\exists$ S invertibile t.c. $A' = {}^t SAS$.

Sono congruenti le matrici di una forma bilineare b rispetto a basi diverse.

Ogni matrice simmetrica reale è congruente a una matrice diagonale, ~~rispe~~ con S matrice ortogonale, ${}^t SAS = S^{-1}AS$.

S diagonalizza la forma bilineare e l'endomorfismo associati ad A.

Abbiamo visto:

se b è una forma bilineare simmetrica reale,

q è la forma quadratica associata a b,

$\exists$ una base $\mathcal{B}$ rispetto a cui q si scrive:

$q(x_1 \dots x_n) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \dots - x_r^2$, $\quad r \leq n$

Allora $M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ $(*)$

ha m autovalori uguali a 1, $r-m$ uguali a -1, $n-r$ autovalori uguali a 0.

<u>Teorema di Sylvester</u> - Legge d'inerzia

V sp. vett. reale, $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

Sia $\mathcal{B}$ una base di V, $A = M_{\mathcal{B}}(b)$.

Allora il numero di autovalori positivi negativi e nulli di $M_{\mathcal{B}}(b)$ dipende solo da b ed è indipendente dalla base scelta.

Ossia: ogni matrice simmetrica reale è congruente a una e una sola matrice della forma $(*)$.

Due matrici simmetriche reali sono congruenti se e solo se hanno gli stessi m, r.

<u>Segnatura</u> di una forma bilineare simmetrica b, o quadratica q, è la coppia (m, r) opp. la terna (m, r, n).

<u>Def.</u> 1) q è definita positiva se $(m, r) = (n, n)$

2) definita negativa se $(m, r) = (0, n)$

3) semidefinita positiva se $(m, r) = (r, r)$ con $r < n$

4) semidefinita negativa se $(m, r) = (0, r)$ con $r < n$

5) indefinita in tutti gli altri casi.

1) $\Leftrightarrow q(v) \geq 0 \ \forall v$ e $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
b è un prodotto scalare;

3) $\Leftrightarrow q(v) \geq 0 \ \forall v$ ma $\exists v \neq 0$ t.c. $q(v) = 0$

2) $\Leftrightarrow q(v) \leq 0 \ \forall v$ e $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

4) $\Leftrightarrow q(v) \leq 0 \ \forall v$ ed $\exists v \neq 0$ con $q(v) = 0$

5) $\exists v \neq 0$ e $w \neq 0$ con $q(v) > 0$ e $q(w) < 0$.

Lo spazio-tempo di Minkowski, che ha dim 4, ha un "prodotto scalare" non def. positivo, con segnatura $(3,4,4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

— . —

Criterio di Cartesio

Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio di grado n:

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $n > 0, a_n \neq 0$.

Sia m il minimo intero t.c. $a_m \neq 0$.

Supp. che tutte le radici di p siano reali.

Allora:

1) 0 è radice di $p(x) \iff m \geq 1$ e $m = m_a(0)$;

2) il numero di radici positive di $p(x)$ (contate con la relativa molteplicità) è uguale al numero di variazioni di segno nella sequenza dei coefficienti <u>non nulli</u> di $p(x)$: $(a_m, \dots, a_n)$.

Il numero di radici negative è pari a

n − (numero di radici positive) − m. ∎

Il criterio si applica al polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale. La forma bilineare simm. associata è un prodotto scalare se ci sono n variazioni di segno.

Per una dim. si veda il libro

Marco Abate, Geometria, McGraw-Hill.