Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2019/2020 - 22 gennaio 2020
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA

(1) (5 punti) Si scriva la definizione di applicazione lineare.
Si enunci e si dimostri il Teorema di Dimensione per applicazioni lineari.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-3z \\ -x+y+3z \\ 3x-3y-9z \end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

(b) (4 punti) Si determinino le dimensioni di $\ker f$ e di $\mathrm{Im} f$, una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}\, A = 1$

$\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg}\, A = 3 - 1 = 2$ per Teorema di Dimensione

eq. di $\ker f$: $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$x - y - 3z = 0$; due vettori lin. indi. di $\ker f$ sono, ad esempio, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ (la prima colonna di A, ad esempio)

(c) (2 punti) Si dica se $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

Osservo che i vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti; infatti, la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango: $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

quindi $\dim(\ker f + \mathrm{Im} f) = 3$ e per Grassmann $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im} f) = 0$, quindi SONO IN SOMMA DIRETTA.

(d) (2 punti) Si dica se $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ sono sottospazi ortogonali. rispetto prodotto scalare standard

Non sono ortogonali perché

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3+3 = 6 \neq 0$$

(Due sottospazi vettoriali W e U sono ortogonali $\Leftrightarrow$ $\forall w \in W$ e $\forall u \in U$ si ha $w \cdot u = 0$)

(e) (4 punti) Si determini il polinomio caratteristico di f e il suo spettro.

$$p_f(x) = p_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 & -3 \\ -1 & 1-x & 3 \\ 3 & -3 & -9-x \end{pmatrix} = -x^3 - 7x^2 = -x^2(x+7)$$

$$Sp(f) = \{0, -7\}$$

(f) (4 punti) Si dica, motivando la risposta, se f è diagonalizzabile oppure no.

f è diagonalizzabile per il Secondo Criterio:

- $p_f(x) = -x \cdot x \cdot (x-7)$ è prodotto di fattori lineari
- $m_a(0) = 2$, $m_g(0) = \dim \ker f = 2 = m_a(0)$

$m_a(-7) = 1 \geq m_g(-7) \geq 1 \Rightarrow m_a(-7) = m_g(-7)$

(3) (a) (3 punti) Si trovino delle equazioni parametriche della retta affine in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti

$$P_1 = (1,2,0) \qquad \text{e} \qquad P_2 = (0,3,2).$$

Giacitura della retta : $\mathrm{Span}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$; passa per P_1

eq. parametriche : $r: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 2t \end{cases}$

(b) (2 punti) Si dica, motivando la risposta, se i punti

$$P_1 = (1,2,0), \qquad P_2 = (0,3,2) \qquad \text{e} \qquad P_3 = (2,1,-2)$$

sono allineati o no.

I tre punti sono allineati $\Leftrightarrow$ sono contenuti in una retta $\Leftrightarrow$ $P_3 \in r$ retta per P_1 e P_2; verifico:

$P_3 = (0,3,2) \in r \Leftrightarrow \exists \bar{t}$ tale che $\begin{cases} 0 = 1-\bar{t} \\ 3 = 2+\bar{t} \\ 2 = 2\bar{t} \end{cases}$; per $\bar{t} = 1$

le tre equazioni sono soddisfatte. Quindi i 3 punti sono allineati.

(c) (4 Punti) Si trovino delle equazioni parametriche della retta r di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che verifichi le seguenti proprietà:

- sia parallela alla retta s di equazioni parametriche $s: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2-t; \end{cases}$
- sia incidente la retta u di equazioni parametriche $u: \begin{cases} x = 2+\tau \\ y = \tau \\ z = 2\tau; \end{cases}$
- sia contenuta nel piano $y - z = 0$.

$r /\!/ s$: $r: \begin{cases} x = \rho_1 + t \\ y = \rho_2 - t \\ z = \rho_3 - t \end{cases}$ contenuta in $y - z = 0$ H $\Leftrightarrow \rho_2 = \rho_3$

Incidente u: deve passare per $H \cap u$: $y - z = 0$ $\begin{cases} x = 2+\tau \\ y = \tau \\ z = 2\tau \end{cases}$

$\Rightarrow \tau - 2\tau = 0,\ \tau = 0 \Rightarrow H \cap u = \{(2,0,0)\}$, $r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$