Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2019-2020, sessione invernale, primo appello

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________

N. Matricola ____________________ **Anno di corso** ____________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Al variare di $a \in (0, +\infty)$ si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x^a + x^{2a}\right) - \tanh(x)}{\underbrace{\int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt}_{o(x^2)} + \underbrace{1 - \cos x}_{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}} =: L_a$$

$$\text{Denomin} = \frac{x^2}{2}\left(1+o(1)\right)$$

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\lg(1+x^a+x^{2a}) = x^a + x^{2a} - \frac{x^{2a}}{2} + o(x^{2a}) = x^a + \frac{x^{2a}}{2} + o(x^{2a})$$

$$\text{th}(x) = x + o(x) = x + O(x^2) \quad (\text{poiché th } x \text{ è dispari})$$

$$\text{Numeratore} = x^a + \frac{x^{2a}}{2} - x + o(x^2) = \begin{cases} x^a(1+o(1)) & \text{se } 0<a<1 \\ -x(1+o(1)) & \text{se } a>1 \\ \frac{x^2}{2}(1+o(1)) & \text{se } a=1 \end{cases}$$

$$L_a = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<a<1 \\ -\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $z^6 + z^3 + |z|^2 + 1 = 0$.

In coordinate $\begin{cases} r^6\cos(6\vartheta) + r^3\cos(3\vartheta) + r^2 + 1 = 0 \\ r^6\sin(6\vartheta) + r^3\sin(3\vartheta) = 0 \end{cases}$ o

$$\begin{cases} r^6\cos(6\vartheta) + r^3\cos(3\vartheta) + r^2 + 1 = 0 \\ r^3\sin(3\vartheta)\left(2r^3\cos(3\vartheta) + 1\right) = 0 \end{cases}$$

Per $\sin(3\vartheta) = 0 \Rightarrow \cos(3\vartheta) = \pm 1 \Rightarrow \cos(6\vartheta) = 1$

La prima equazione diventa $r^6 \pm r^3 + r^2 + 1 = 0$, non ha soluzioni positive $r \geq 0$.

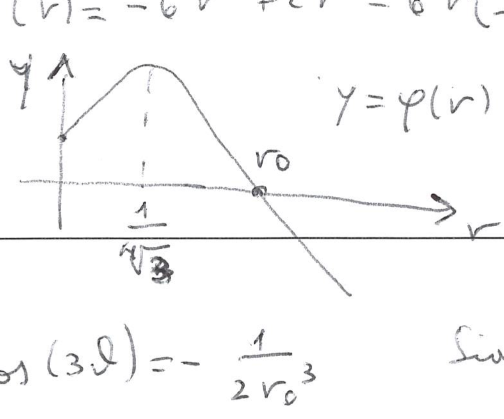
$2r^3\cos(3\vartheta) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(3\vartheta) = -\frac{1}{2r^3} \Rightarrow \cos(6\vartheta) \underbrace{=}_{= 2\cos^2(3\vartheta) - 1} \frac{1}{2r^6} - 1$

ottengo nella 1^o equazione

$r^6\left(\frac{1}{2r^6} - 1\right) - \frac{1}{2} + r^2 + 1 = 0$ cioè

$(\varphi(r) \doteq)\ -r^6 + r^2 + 1 = 0$. Nota $\varphi(0) = 1$, $\varphi(+\infty) = -\infty$

$\varphi'(r) = -6r^5 + 2r = 6r\left(-r^4 + \frac{1}{3}\right)$ Nota che $\varphi(1) = 1 > 0$



Esiste una unica radice r_0, ed inoltre $r_0 > 1$

$\cos(3\vartheta) = -\frac{1}{2r_0^3}$ Sia $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$ t.c. $\cos(\alpha_0) = -\frac{1}{2r_0^3}$

$3\vartheta = \pm\alpha_0 + 2\pi k$

$\vartheta = \pm\frac{\alpha_0}{3} + 2\pi\frac{k}{3}$ $k = 0, 1, 2$. 6 soluzioni

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(\sqrt{t^2+t}+1)}dt & \text{se } x \geq 0, \\ \displaystyle\int_0^x 3^{[t]}dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; da $\frac{t}{\sqrt{t^2+t}+1} = 1+o(1)$ per $t \to +\infty$, segue $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} -\int_x^0 3^{[t]}dt = -\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^0 3^{[t]} = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{-j}^{-(j-1)} 3^{-j}dt = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} 3^{-j} - 1 \right) =$

$= \frac{-1}{1-\frac{1}{3}} + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$

- si calcoli $f'(x)$ dove é definita, ed altrimenti si calcoli $f'_s(x)$ e $f'_d(x)$;

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+1}$ per $x > 0$ $\quad f'_d(0) = 0$

$f'(x) = 3^{[x]}$ per $x < 0$ $x \notin \mathbb{Z}$; $f'_d(x) = 3^x$, per $x \in \mathbb{Z}$ $x < 0$, $f'_s(x) = 3^{x-1}$ per $x \in \mathbb{Z}$ $x \leq 0$

$f'_s(0) = \frac{1}{3}$

- si discuta concavitá e convessitá di f;

per $x > 0$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}+1 - \frac{x}{2}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}}{(\sqrt{x^2+x}+1)^2} = \frac{\cancel{2x^2}+2x+2\sqrt{x^2+x}-\cancel{2x^2}-x}{2\sqrt{x^2+x}\,(\sqrt{x^2+x}+1)^2} > 0$ per $x > 0$

$\Rightarrow$ f convessa per $x > 0$, convessa per $x < 0$

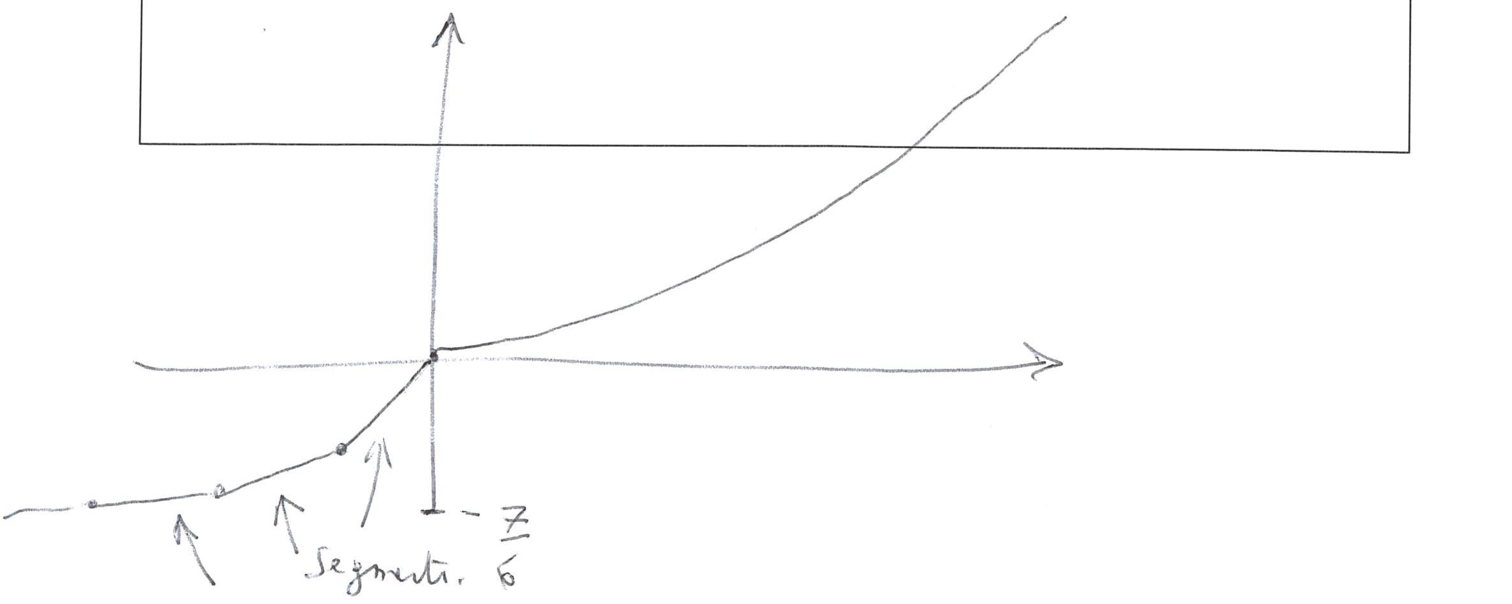
- si stabilisca se f ha rette asintotiche sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$; $y = -\frac{7}{6}$ retta asintotica per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+1} = 1$; $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t - t\sqrt{1+\frac{1}{t}} - 1}{\sqrt{t^2+t}+1}dt$

$= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\cancel{t} - \cancel{t} - \frac{3}{2} + o(1)}{\sqrt{t^2+t}+1} dt = -\infty$ per confronto asintotico con t^{-1}.

Quindi non esiste retta asintotica per $x \to +\infty$

- si tracci il grafico.



ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \dfrac{x+x^2}{1+x^2}$:

(i) calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $f(x)$;

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$(x+x^2)\frac{1}{1+x^2} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j+1} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j+2}}_{P_{2n+2}} + \underbrace{(-1)^n \frac{(x^{2n+3} + x^{2n+4})}{1+x^2}}_{o(x^{2n+2})}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j+2}}_{P_{2n+1}(x)} + \underbrace{(-1)^n x^{2n+2} + \frac{(-1)^n (x^{2n+3} + x^{2n+4})}{1+x^2}}_{o(x^{2n+1})}$$

$\cancel{= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x}$ $P_0 = 0$

(ii) valutare l'errore $|f(1/2) - p_n(1/2)|$ per ogni n. Sono espliciti

~~Ad esempio~~

$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - P_{2n+2}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = \frac{2^{-2n-3} + 2^{-2n-4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2^{-n-1} + 2^{-2n-2}}{5} =$$

$$= 2^{-n-1}\,\frac{3}{10}$$

$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - P_{2n+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = 2^{-n-1} + \frac{3}{10}\, 2^{-n-1}$$