Soluzione Esercizio 1

I La funzione ha una singolaritá isolata in $z = -i$, che è un polo semplice, e ha punti di diramazione in $z = 0$ e $z = 1$ (dove si annullano gli argomenti della radice). La funzione è olomorfa a $z = \infty$ (ha limite 1 e ammette serie di Taylor in potenze inverse di z).

II Scegliendo come taglio il segmento sull'asse reale che congiunge i punti di diramazione in $z = 0$ e $z = 1$, con l'argomento delle due radici tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$, e scegliendo un cammino γ che circonda il taglio in senso antiorario, abbiamo che

$$\int_\gamma dz\, f(z) = -2i \int_0^1 dx\, \frac{\sqrt{x - x^2}}{x + i} \ .$$

Prendendo la parte reale e la parte immaginaria troviamo

$$I_1 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\int_\gamma dz\, f(z)\right] \ , \quad I_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\int_\gamma dz\, f(z)\right] \ . \tag{1}$$

III Usando il teorema esterno dei residui abbiamo

$$\int_\gamma dz\, f(z) = -2\pi i\,\mathrm{Res}_f(-i) - 2\pi i\,\mathrm{Res}_f(\infty) \ . \tag{2}$$

Il residuo in $z = -i$ è

$$\mathrm{Res}_f(-i) = \sqrt{-i}\,\sqrt{-i-1} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\, 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{8}} = 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{5\pi}{8}} = -2^{\frac{1}{4}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \ .$$

Espandendo $f(z)$ attorno a $z = \infty$ abbiamo

$$f(z) = 1 - \frac{i}{z} - \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \ ,$$

da cui abbiamo

$$\mathrm{Res}_f(\infty) = \frac{1}{2} + i \ .$$

Sostituendo i residui in (2) e sostituendo il risultato in (1) troviamo

$$a_1 = \frac{1}{2} \ , \quad b_1 = a_2 = -1 \ , \quad b_2 = 1 \ .$$

Soluzione Esercizio 2

I Prendendo la trasformata di Fourier dell'equazione per $G(t)$, troviamo

$$-(\omega + i\beta)\omega\hat{G}(\omega) = 1 \ .$$

La distribuzione che risolve questa equazione è quella data nel testo. Prendendo l'anti-trasformata del termine $A\,\delta(\omega)$ troviamo la funzione costante $\frac{A}{2\pi}$, e in effetti $G(t) = \frac{A}{2\pi}$ con A costante arbitraria è una soluzione dell'equazione omogenea.

II Abbiamo

$$G(t) = \frac{A}{2\pi} + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\left(-\frac{1}{\omega(\omega+i\beta)}\right)e^{-i\omega t} = \frac{A}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+R}\right) d\omega\, g(\omega) \ ,$$

dove abbiamo denotato con $g(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{\omega(\omega+i\beta)}\right)e^{-i\omega t}$ la funzione integranda. Prima di prendere il limite $\epsilon \to 0^+$ e $R \to +\infty$ il cammino è dunque composto da due segmenti sull'asse reale. Nel piano complesso ω (escludendo l'infinito) $g(\omega)$ ha solo un polo semplice in $\omega = -i\beta$, che per $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ si trova nel semipiano inferiore. Quando $t \geq 0$, chiudiamo il cammino aggiungendo la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio R percorsa in senso orario, e la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio ϵ percorsa in senso antiorario, entrambe nel semipiano inferiore, e chiamiamo tale cammino chiuso γ. Per ϵ sufficientemente piccolo e R sufficientemente grande l'integrale su questo cammino contiene il polo e dunque si ha

$$\int_\gamma d\omega\, g(\omega) = -2\pi i\,\mathrm{Res}_g(-i\beta) = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta t} \ .$$

Il contributo dell'arco di raggio R decade esponenzialmente nel limite $R \to +\infty$ mentre il contributo dell'arco di raggio ϵ, che deve essere sottratto, nel limite $\epsilon \to 0^+$ è dato da metà del residuo al polo in $\omega = 0$, duque

$$G(t) = \frac{A}{2\pi} - \frac{1}{\beta}e^{-\beta t} - \pi i \mathrm{Res}_g(0) = \frac{A}{2\pi} - \frac{1}{\beta}e^{-\beta t} + \frac{1}{2\beta} \ , \quad \text{per } t \geq 0 \ .$$

Viceversa quando $t < 0$ aggiungiamo semicirconferenze nel semipiano superiore, e quindi rispetto al calcolo precedente le differenze sono che: (i) l'integrale su γ è nullo perché non c'è nessuna singolarità interna, e (ii) il contributo dell'arco di raggio ϵ da sottrarre ha un segno meno relativo, perché in questo caso l'arco è orientato in senso orario. Dunque

$$G(t) = \frac{A}{2\pi} - \frac{1}{2\beta} \ , \quad \text{per } t < 0 \ .$$

Per ottenere che $G(t)$ sia causale, dobbiamo scegliere $A = \frac{\pi}{\beta}$, dunque otteniamo

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \ .$$

III Usiamo la stessa strategia del punto precedente. La differenza è che ora il polo è situato nel semipiano superiore dunque l'integrale sul cammino chiuso dà risultato nullo per $t \geq 0$, e non nullo per $t < 0$. Dunque in questo caso abbiamo

$$G(t) = \begin{cases} \frac{A}{2\pi} + \frac{1}{2\beta} & , \ \text{per } t \geq 0 \ , \\ \frac{A}{2\pi} + \frac{1}{\beta}e^{-\beta t} - \frac{1}{2\beta} & , \ \text{per } t < 0 \ . \end{cases}$$

Per ottenere una funzione di Green causale dobbiamo scegliere $A = \frac{\pi}{\beta}$ come sopra, e in piú aggiungere anche la soluzione dell'equazione omogena

$$G_0(t) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \ .$$

In questo modo troviamo la stessa risposta per $G(t)$ che abbiamo trovato al punto precedente. Notiamo che per $\mathrm{Re}(\beta) < 0$ la funzione di Green causale cresce esponenzialmente a t grande, dunque $G(t)$ non è una distribuzione temperata e non ammette trasformata di Fourier, per questo abbiamo dovuto aggiungere una soluzione dell'omogenea che non è stata trovata col metodo della trasformata di Fourier.

Soluzione Esercizio 3

I Per mostrare l'identità sul prodotto scalare è sufficiente integrare per parti n volte, e notare che per ogni intero $k < n$ il polinomio $\frac{d^k}{dx^k}(\rho(x))^n$ si annulla a $x = -1$ e $x = +1$ (perché $\rho(x)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ e derivando $k < n$ volte si ottengono solo termini con almeno $n - k > 0$ fattori di $(x-1)$ o $(x+1)$), dunque nell'integrazione per parti tutti i termini di bordo sono nulli. Usando quell'identità e usando il fatto che per ogni $m < n$ abbiamo $\frac{d^n}{dx^n} x^m = 0$, otteniamo che $P^{(n)}(x)$ è ortogonale a tutti i monomi x^m con $m < n$, e di conseguenza è anche ortogonale a tutti i polinomi di grado inferiore a n. In particolare i $P^{(n)}(x)$ formano un sistema ortogonale.

II Usando l'identità mostrata al punto precedente abbiamo

$$(P^{(n)}, P^{(n)}) = \frac{(-1)^n}{(2^n\, n!)^2} \int_{-1}^{+1} dx\, (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{x^{2n}} (x^2-1)^n \ .$$

L'unico contributo non nullo in $\frac{d^{2n}}{x^{2n}}(x^2-1)^n$ viene dal monomio x^{2n}, dunque abbiamo $\frac{d^{2n}}{x^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!$. Portando questa costante fuori dall'integrale e sfruttando l'integrale fornito si ottiene la formula mostrata per C_n.

III I coefficienti di Fourier di e^x nel sistema ortonormale completo sono dati da

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{C_n}} P^{(n)}, e^x \right) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n e^x = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^n A_n}{2^n n!} \ .$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato l'identità mostrata al punto I e il fatto che per ogni n si ha $\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$. L'identità di Parseval ci dice che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \int_{-1}^{+1} dx\, (e^x)^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^{-2}\right) = \sinh(2) \ ,$$

e sostituendo la formula trovata sopra per a_n si ottiene la serie richiesta.