Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2019-2020, sessione invernale, secondo appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di SCIPIO CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Al variare di $a \in (0,+\infty)$ e per $[t]$ la parte intera di t si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{2x} \frac{1+t}{(1+[t])^3}dt - \log(\tanh(x^a)+x^{-a})}{\arctan(2x)-\arctan(x)} = L_a$$

$$\text{Denomin} = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+t^{-2}}dt = \int_x^{2x} t^{-2}(1+o(1))dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}x^{-1} + o(x^{-1})$$

$$\lg(\mathrm{th}(x^a)+x^{-a}) = \lg(1+\mathrm{th}(x^a)-1+x^{-a}) = \lg(1+x^{-a}+o(x^{-a})) \quad \forall a$$

$$= x^{-a} + o(x^{-a})$$

$$\int_x^{2x} \frac{1+t}{(1+[t])^3} = \int_x^{2x} \frac{1+t}{(1+t+[t]-t)^3} = \int_x^{2x} \frac{t\,(1+t^{-1})}{t^3\,(1+t^{-1}+\frac{[t]-t}{t})^3}dt$$

$$= \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}(1+o(1)) = \frac{1}{2}x^{-1} + o(x^{-1}) \quad \text{(come sopra}$$

Percui

$$\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1}+o(x^{-1}) - x^{-a} + o(x^{-a})}{\frac{1}{2}x^{-1}(1+o(1))} = \begin{cases} \frac{-x^{-a}(1+o(1))}{\frac{1}{2}x^{-1}} & a<1 \\ -\frac{1}{2}(1+o(1)) & a=1 \\ 1+o(1) & a>1 \end{cases}$$

$$L_a = \begin{cases} -\infty & a<1 \\ -\frac{1}{2} & a=1 \\ 1 & a>1 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Determinare l'insieme delle soluzioni $Re\left(\frac{z}{z^2+3z-1}\right)>0$.

$Re\left(\frac{z(\bar z^2+3\bar z-1)}{|z^2+3z-1|}\right)>0$. Consideriamo

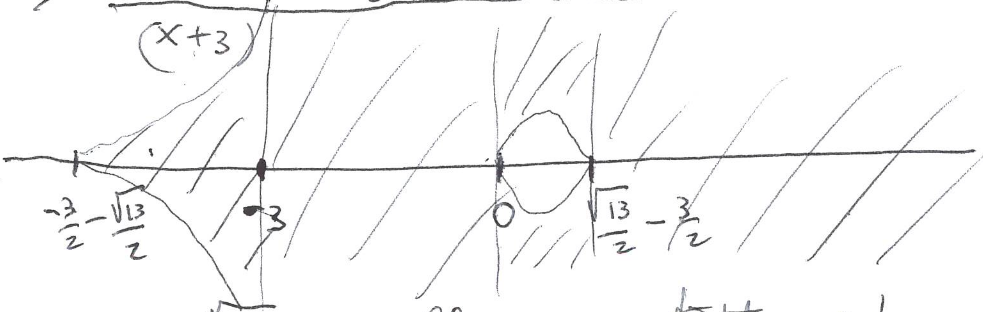
$Re(\bar z|z|^2+3|z|^2-z)>0$, cioè $Re((x-iy)(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)-(x+iy))>0$

$x(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)-x>0$

$(x+3)y^2 > -x^3-3x^2+x = -x(x^2+3x-1) = -x\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

Se $x>-3$ allora

$y^2 > \frac{-x\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}{(x+3)}$



Per $x\geq \frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{3}{2}$ allora sono tutte soluzioni

per $0\leq x\leq \frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{3}{2}$ sono soluzioni per $|y|>\sqrt{\frac{\left|x\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right|}{|x+3|}}$ chiamo $f(x)$

per $-3<x<0$ sono tutte soluzioni

Per $x\leq -3$ ~~non ci sono soluzioni~~ sono tutte soluzioni. Per $x<-3$

$y^2 < -\frac{x\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}{x+3}$. Per

$-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} < x < -3$ le soluzioni si hanno per $|y|<f(x)$

Infine, per $x<-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$, non ci sono soluzioni.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri, per $[x]$ la parte intera di x,

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t+t^2+t^3}dt & \text{se } x \geq 0, \\ \displaystyle\int_{[x]}^{2[x]} \sin(\pi t)dt & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \qquad A = \frac{t}{1+t^2}\Big|_{t=-1} = -\frac{1}{2}$$

$B = \frac{1}{2}$ (Perché l'integrando è integrabile)

$$= \frac{-\frac{1}{2}(1+t^2)+\frac{1}{2}(1+t)t+C(1+t)}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}$$

confrontando termini costanti $C = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\lg(1+x) + \frac{1}{4}\lg(1+x^2) + \operatorname{artg}(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\pi}{4}$$

- si determini $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

$$\int_{[x]}^{2[x]} \sin(\pi t) = -\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big]_{[x]}^{2[x]} = \frac{\cos(\pi[x]) - \cos(2[x]\pi)}{\pi} =$$

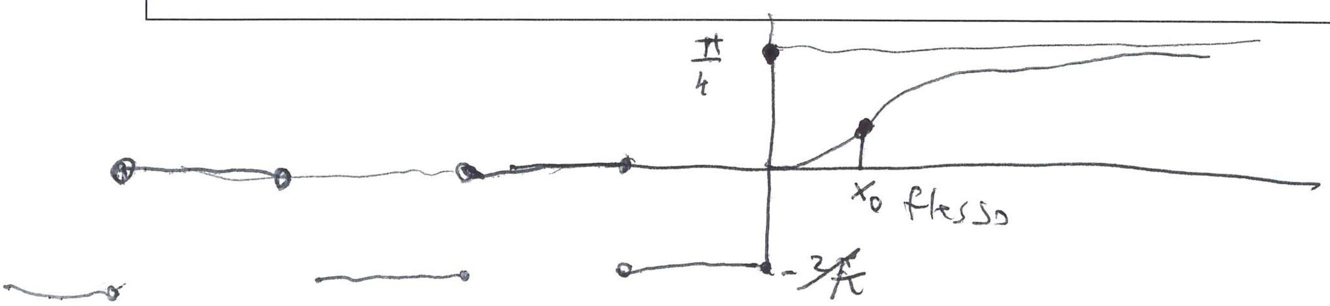
$= \frac{(-1)^{[x]}-1}{\pi}$ oscillante tra 0 e $-\frac{2}{\pi}$ e quindi non ha limite

- si verifichi che $f \in C^1(\mathbb{R})$;

Ovviamente f è discontinua per $x \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0)$ quindi $f \notin C^1(\mathbb{R})$: c'è stato un errore di stampa da parte del docente.

- si determini quanti flessi ha $f(x)$ in $(0, +\infty)$ e corrispondenti concavitá e convessitá.

per $x>0$ $f'(x) = \frac{x}{1+x+x^2+x^3}$, $f''(x) = \frac{1-x^2-2x^3}{(1+x+x^2+x^3)^2}$. Notare che $f''(0) = 1 > 0$, $f''(1) < 0$ e il numeratore è decrescente. Quindi $\exists\ 0 < x_0 < 1$ t.c. $f''(x_0) = 0$, f è convessa in $(0, x_0)$ ed è concava in $(x_0, +\infty)$



ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_x^{2x} e^{t^3}\, dt$:

$$e^y = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} + \underset{\underset{o(y^n)}{\shortparallel}}{E_n(y)}$$

(*i*) calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $f(x)$;

$$\int_x^{2x} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{t^{3j}}{j!} + E_n(t^3) \right) dt =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{2^{3j+1}-1}{j!\,(3j+1)} x^{3j+1}}_{P_{3n+1}} + \underbrace{\int_x^{2x} E_n(t^3)\, dt}_{o(x^{3n+1})}$$

Gli altri si ottengono da questi

(*ii*) approssimare $f(1)$ con un numero razionale ed un errore minore di $\frac{1}{100}$.

$P_{3n+1}(1) \in \mathbb{Q}$, uso $E_n(y) = \frac{e^{c_y}}{(n+1)!} y^{n+1}$ con $0 < c_y < y$.

$$f(1) - P_{3n+1}(1) = \int_1^2 E_n(t^3)\, dt = \int_1^2 \frac{e^{c_{t^3}}}{(n+1)!} t^{3n+3}\, dt$$

$$\leq \frac{e^8}{(n+1)!} \int_1^2 t^{3n+3}\, dt = \frac{e^8}{(n+1)!} \frac{2^{3n+4}-1}{3n+4}$$

$$\leq \frac{3^8\, 2^{3n+4}}{(n+1)!\,(3n+4)}$$

ecc (effettivamente, senza calcolatrice non è agevole)