Corso di GEOMETRIA - Simulazione prova scritta
A.A. 2019/2020 - 3 febbraio 2020
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) Si dia la definizione di sottospazio affine di uno spazio affine e se ne ricavino delle equazioni parametriche.
Si illustrino i procedimenti per il passaggio da equazioni parametriche a equazioni cartesiane e viceversa.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si scriva la matrice $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e una base per ciascuno di loro.

(d) Si consideri il piano coordinato xy di equazione

$$H \ : \ z = 0.$$

Si determini la dimensione e una base del sottospazio $f(H)$.

(e) Si determini il polinomio caratteristico di f e il suo spettro.

(f) Si trovi una base ortonormale $\mathcal{C}$ di autovettori per f.

(g) Si dica se la forma bilineare simmetrica $g_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da

$$g_A(v, w) = {}^t v \cdot A \cdot w,$$

é un prodotto scalare oppure no, motivando la risposta.

(3) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti $Q_1 = (1, -1, 1)$, $Q_2 = (0, 1, 0)$ e $Q_3 = (-1, 0, -1)$.

(4) Si consideri il piano K di equazione cartesiana

$$K : \qquad x + y + z = 5.$$

Si determinino delle equazioni parametriche di due rette a scelta, che siano contenute in K e passanti per il punto $P = (1, 2, 2)$.