Prima prova scritta di Geometria 1, 20 gennaio 2020

1. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di f è reale;

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) la matrice di f rispetto a una base ortonormale di V è hermitiana;

iv) esiste una base ortonormale di autovettori di f.

2. i) Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_r$ un prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_1], \ldots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W.

ii) Sia $f : V \to U$ lineare e $W = \mathrm{Ker}(f)$. Dimostrare che l'applicazione $\bar{f} : V/W \to U$, con $\bar{f}([v]) = f(v)$, è ben definita, lineare e iniettiva.

3. Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.

4. i) Dimostrare che $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, per ogni autovalore λ di un endomorfismo $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

ii) Siano g, a e n numeri interi con $1 \leq g \leq a \leq n$. Dare un esempio di una matrice quadrata $n \times n$ con un autovalore λ tale che $m_g(\lambda) = g$ e $m_a(\lambda) = a$ (per numeri arbitrari g, a e n come sopra; si potrebbe provare con una matrice in forma normale di Jordan).

5. i) Dimostare il teorema di Gram-Schmidt: Sia V uno spazio unitario di dimensione finita n, allora ogni base ortonormale $v_1, \ldots, v_m$ di un sottospazio U di V si prolunga ad una base ortonormale di V.

ii) Dimostrare che $V = U \oplus U^\perp$ dove $U^\perp$ denota il complemento ortogonale di U in V.